Zusammenhang Volumen - Oberfläche

1 Motivation

Wie man feststellt gelten folgende Beziehungen:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_r(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_n(B_r(0)),$$

Wobei $B_r(0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$ der abgeschlossene Ball mit Radius r um 0 ist. Zum Beispiel gilt in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{vol}_2(S^2) = 4\pi r^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_3(B_r(0)).$$

Ein ähnliches Resultat erhält man für den Volltorus T und seinen Rand ∂T, zum Beispiel in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{vol}_2(\partial T) = 4\pi^2 r R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(2\pi^2 r^2 R) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_3(T).$$

Im letzteren Fall funktioniert die Prozedur nur für den Parameter r, nicht aber für R. Es stellt sich die Frage, welche Bedingungen dafür erfüllt sein müssen.

2 Voraussetzungen

Satz 1
Sei für $r \in [0, R]$ ein Gebiet $B_r \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand ∂B_r vorgegeben und nehme an, dass ein Diffeomorphismus $\boldsymbol{\Phi} : [0, R] \times U \to B_R$ mit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ existiert, so dass

$$B_r = \boldsymbol{\Phi}([0, r] \times U)$$
$$\partial B_r = \boldsymbol{\Phi}(\{r\} \times U).$$

Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_n(B_r) = \int_{\partial B_r} \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} f\|}\mathrm{d}\sigma,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die erste Komponente der Inversen Parametrisierung $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{x}) = ((\Phi^{-1})^1, \ldots, (\Phi^{-1})^n)(\boldsymbol{x})$ ist:

$$f(\boldsymbol{x}) = (\Phi^{-1})^1(\boldsymbol{x}).$$

Korollar 1
Ist $\|\boldsymbol{\nabla} f\|$ *konstant auf* ∂B_r*, so gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\operatorname{vol}_n(B_r) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} f\|}\operatorname{vol}_{n-1}(\partial B_r)$$

und für $\|\boldsymbol{\nabla} f\|\big|_{\partial B_r} \equiv 1$ *gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\operatorname{vol}_n(B_r) = \operatorname{vol}_{n-1}(\partial B_r).$$

Lemma 1
Sei $A \in C^1((a,b), GL(n,\mathbb{R}))$*. Dann gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A(t)) = \operatorname{tr}(\dot{A}(t)A^{-1}(t))\det(A(t)), \tag{D}$$

mit $\dot{A}(t) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t)$.

Beweis
Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichne $A^\sharp$ die Kofaktormatrix (Transponierte der komplementären Matrix) mit den Einträgen

$$A^\sharp_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)}),$$

wobei $A^{(i,j)}$ der Minor $(n-1)$-ter Ordnung ist, der aus derjenigen Untermatrix berechnet wird, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entsteht. Es gilt dann gemäss der Cramerschen Regel zur Entwicklung der Determinante nach einer Spalte

$$A^T A^\sharp = \det(A)\mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j^\sharp\rangle = \delta_{ij}\det(A).$$

Dabei bezeichnen $\boldsymbol{a}_i$ bzw. $\boldsymbol{a}_i^\sharp$ die i-te Spalte von A bzw. von $A^\sharp$ und

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Insbesondere gilt

$$\det(A) = \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i^\sharp\rangle,$$

wobei, wir $1 \le i \le n$ frei wählen können. Der Punkt ist hier, dass die Spalte $\boldsymbol{a}_i^\sharp$ unabhängig von a_{ij}, $1 \le j \le n$ ist, da deren Einträge aus Determinanten von Minoren von A hervorgehen, in welchen gerade $\boldsymbol{a}_i$ gestrichen wird. Darum ist

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i^\sharp\rangle = a^\sharp_{ij}.$$

Ist die Matrix $A(t)$ abhängig von einer Variable t, folgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A(t)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t))\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\sharp}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr}(\dot{A}(t)(A^{\sharp})^{T}(t)).$$

Mit $(A^{\sharp})^T = \det(A)A^{-1}$ folgt die Behauptung. $\square$

Beweis (Satz)

Setze $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t,\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\Phi}(tr,\boldsymbol{\xi})$. Dann ist $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}([0,1]\times U) = B_r$ und

$$\mathrm{vol}_n(B_r) = \int_{[0,1]\times U} |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\,\mathrm{d}t\ \mathrm{d}^{n-1}\xi,$$

also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_n(B_r) = \int_{[0,1]\times U} \partial_r|\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\,\mathrm{d}t\ \mathrm{d}^{n-1}\xi.$$

Mit Lemma 1 und $|x| = x\,\mathrm{sgn}(x)$ folgt

$$\begin{aligned}
\partial_r|\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}| &\overset{\text{(D)}}{=} |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\operatorname{tr}\left(\partial_r \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\ (\mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}})^{-1}\right)\\
&= |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\operatorname{tr}\left(\mathrm{D}(\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}})\ \mathrm{D}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\right)\\
&= |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\operatorname{tr}\left(\mathrm{D}(\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}})\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\ \mathrm{D}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})\right)\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\\
&= |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\operatorname{tr}\left(\mathrm{D}(\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})\right)\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\\
&= |\det \mathrm{D}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}|\operatorname{div}(\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}.
\end{aligned}$$

Wir schliessen daraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{vol}_n(B_r) = \int_{B_r}\operatorname{div}(\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_n \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial B_r}\langle\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1},\boldsymbol{\nu}\rangle\mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\boldsymbol{\nu} : \partial B_r \to S^{n-1}$ das nach aussen gerichtete Einheitsnormalenvektorfeld bezeichnet ($S^{n-1} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ ist die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre).

$f(\boldsymbol{x}) = (\Phi^{-1})^1(\boldsymbol{x})$ ist so konstruiert, dass

$$f(\boldsymbol{\Phi}(r,\boldsymbol{\xi})) = r \qquad \forall\boldsymbol{\xi}\in U,$$

oder

$$f(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t,\boldsymbol{\xi})) = tr \qquad \forall\boldsymbol{\xi}\in U,$$

Leiten wir diese Gleichung nach r ab, so bekommen wir

$$\langle\boldsymbol{\nabla} f\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}},\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\rangle = t \quad\Leftrightarrow\quad \langle\boldsymbol{\nabla} f,\partial_r\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\circ\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\rangle = (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})^1.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass ($\partial B_r = f^{-1}(r)$ ist die Niveaumenge von f zum Niveau r) $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} f\|}\boldsymbol{\nabla} f$ und $(\tilde{\Phi}^{-1})^1 \equiv 1$ auf ∂B_r, folgt

$$\langle \partial_r \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} f\|}$$

und schliesslich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \operatorname{vol}_n(B_r) = \int_{\partial B_r} \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} f\|} \mathrm{d}\sigma.$$

□