

# Numerische Methoden

Prof. D. Kressner

## Wichtige Hinweise:

- Bitte deutlich schreiben und alle Ergebnisse begründen. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht gewertet.
- Wenn nicht anders vermerkt, sollen Rechnungen auf 4 Dezimalstellen genau ausgeführt werden.
- Die Argumente von trigonometrischen Funktionen sind in Radian angegeben.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.

1. [**Lineare Gleichungssysteme**] Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 3 \\ 2 & 0.1001 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die **LR**-Zerlegung von  $\mathbf{A}$  in  $\mathbb{F}(10, 4, -10, 10)$  (*ohne* Pivotsuche).
- b) Berechnen Sie die Lösung  $\underline{x}$  des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$  durch Vor- und Rückwärtseinsetzen (in  $\mathbb{F}(10, 4, -10, 10)$ ), wobei

$$\underline{b} = (1 \quad 1 \quad 1)^\top$$

Berechnen Sie ebenfalls die 2-Norm des Residuums  $\underline{r}$ .

- c) Berechnen Sie das Residuum  $\underline{r}_d$  in *doppelter* Genauigkeit: Nehmen Sie dazu den Vektor  $\underline{x}$  aus b) und berechnen Sie  $\underline{b} - \mathbf{A}\underline{x}$  in  $\mathbb{F}(10, 2 \cdot 4, -10, 10)$ .
- d) Führen Sie, ausgehend von  $\underline{r}_d$  einen Schritt der Nachiteration ebenfalls in doppelter Genauigkeit durch. Benutzen Sie dazu die berechneten  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{R}$  aus Teil a).

2. [**Interpolation**]

- a) Gesucht ist eine Polynominterpolation  $p_4(x)$  4. Grades zur Funktion  $f(x) = \sin(x)$ , welche an den Stützstellen  $x_i = i \cdot \frac{\pi}{4}$ ,  $i = 0, \dots, 4$ , dieselben Werte wie  $f(x)$  hat. Geben Sie die Newton-Darstellung von  $p_4(x)$  an.

- b) Berechnen Sie den exakten Fehler  $|p_4(x) - f(x)|$  bei  $x = 1$  und vergleichen Sie diesen mit der in der Vorlesung angegebenen Fehlerabschätzung.
- c) Welche Art von Spline (vollständig, periodisch, oder natürlich) bietet sich am besten an, um dieselbe Funktion in den selben Stützstellen zu interpolieren. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf (ohne es zu lösen). Wie kann man ein solches System effizient lösen, insbesondere bei einer grossen Anzahl von Stützstellen? Begründen Sie.
- d) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler bei der Spline-Interpolation an.

### 3. [Numerische Integration]

- a) Approximieren Sie das Integral

$$\int_{-1}^2 x \exp(x^2) dx = \frac{1}{2} e(e^3 - 1) \approx 25.939934102342596921$$

mithilfe der folgenden summierten Quadraturformeln mit jeweils 1, 2 und 4 Teilintervallen: i) Trapezregel, ii) Simpsonregel.

- b) Berechnen Sie den Fehler für jede der obigen Approximationen und vergleichen Sie mit der theoretisch zu erwartenden Konvergenzrate.
- c) Wie lässt sich das obige Integral numerisch besser berechnen, *ohne* die Anzahl der Funktionsauswertungen zu erhöhen? Begründen Sie.

### 4. [Ausgleichsrechnung]

In dieser Aufgabe soll die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  durch ein Polynom der Form  $p(x) = a + bx + cx^2$  in den Punkten

$$x = [-1, -0.5, 0, 0.5, 1]$$

im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert werden, d.h. man sucht Werte für  $a$ ,  $b$  und  $c$  so dass

$$\sum_{i=1}^5 |f(x_i) - p(x_i)|^2$$

minimal ist.

- a) Erklären Sie, weshalb das den Fehler minimierende Polynom  $b = 0$  erfüllen muss.
- b) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem. Vereinfachen Sie das Ausgleichsproblem so weit wie möglich. (Hinweis: Benutzen Sie dazu a)).
- c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mithilfe der Normalgleichungen. Begründen Sie die Wahl der Methode, mit welcher Sie das resultierende lineare Gleichungssystem lösen.

5. [Eigenwerte, MATLAB]

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche die Potenzmethode benutzt, um die Konditionszahl bezüglich der 2-Norm einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  zu berechnen. Nutzen Sie dazu den Zusammenhang zwischen Singulärwerten und der 2-Norm einer Matrix.

Input soll die Matrix  $\mathbf{A}$  sein, Output eine Approximation der Konditionszahl von  $\mathbf{A}$  in der 2-Norm.

Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium. Als Startvektor für die Potenzmethode sollen Zufallsvektoren verwendet werden.