

LR-Zerlegung mit Zeilentauschen für die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Initialisierung:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}.$$

Auswahl des Pivotelements als betragsgrössten Eintrag in der ersten Spalte von \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Zeilentausch 1 \leftrightarrow 2:

$$\mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(\mathbf{L} ändert sich im allerersten Schritt nicht).

Reduktion der ersten Spalte:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Auswahl des Pivotelements betragsgrössten Eintrag in der zweiten Spalte:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeilentausch 2 \leftrightarrow 3:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{P} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reduktion der zweiten Spalte:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Auswahl des Pivotelements betragsgrössten Eintrag in der dritten Spalte:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Zeilentausch 3 \leftrightarrow 4:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reduktion der zweiten Spalte:

$$\mathbf{L} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vergleich MATLAB:

```
>> [L,R,P] = lu(A)
```

```
L =
```

```
1.0000    0    0    0
0.5000    1.0000    0    0
0.2500    0.3333    1.0000    0
0.5000    0.1667    0.2500    1.0000
```

```
R =
```

```
4    4    4    4
0    6    6    6
0    0    4    4
0    0    0    1
```

```
P =
```

```
0    1    0    0
0    0    1    0
0    0    0    1
1    0    0    0
```