D-MATH **Numerische Mathematik** **Winter 2009**
Prof. Ralf Hiptmair
Daniel Wright

Prüfung

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Maximal erreichbare Punktzahl: 45

Bitte beachte das zusätzliche Blatt “Hinweise zur Computerprüfung”.

1. *(15 Punkte)* Betrachtet wird das Runge–Kutta Einschrittverfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array} \tag{1}$$

a) Implementiere das Runge–Kutta Einschrittverfahren für das allgemeine Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \ ,$$

im mitgelieferten MATLAB-Template `m/a1/RK3Solve.m`.

b) Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda\,(y - \sin(t)) + \cos(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{2a}$$

mit exakter Lösung

$$y(t) = (y_0 - \sin(t_0))\, e^{\lambda(t-t_0)} + \sin(t). \tag{2b}$$

Verwende nun konkret

$$t_0 = 1, \quad \lambda = -10, \quad y(1) = \sin(\pi/4) \text{ und den Endzeitpunkt } T = 8 \ .$$

für das Anfangswertproblem (2a).

Bestimme durch numerisches Experimentieren die aus Stabilitätsgründen maximale zulässige Schrittweite $h_{\max}$.

Schreibe eine Funktion in der Datei `m/a1/MaxSchrittweite.m`, die sowohl zwei Näherungslösungen (erhalten durch das RK-ESV (1)) für $h = h_{\max} \pm 0.01$ als auch die exakte Lösung in einer Figur plottet und speichere die Grafik in `m/a1/schrittweite.eps`.

Bitte wenden!

c) Berechne die Stabilitätsfunktion $S(z)$, $z = h\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ des Verfahrens (1).

d) Ergänze die Matlab–Datei `m/a1/StabDomRK3.m`, die das Stabilitätsgebiet des Verfahrens auf $z = x + iy$, $(x, y) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$ plotten soll. Speichere ein Plot des Stabilitätsgebiets in der Datei `m/a1/stabdom.eps`.

Inwiefern bestätigt die Grafik deine Stabilitätsgrenze $h_{\max}$ aus Teil b)?

e) Erkläre, warum für betragsmässig grosse negative $\lambda \ll 0$ das Problem (2a) steif ist.

f) Warum sind explizite Verfahren, auch wenn sie konsistent sind, für steife Probleme ineffizient?

g) Beweise, dass die Stabilitätsfunktion jedes expliziten Runge-Kutta Einschrittverfahrens ein Polynom in $z := h\lambda$ ist.

2. *(15 Punkte)* Aus der impliziten Mittelpunktsregel als Basisverfahren werde auf der Grundlage von 1 und 2 Mikroschritten durch Extrapolation ein weiteres Einschrittverfahren für das autonome Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ erzeugt. Die rechte Seite werde als "hinreichend glatt" angenommen.

a) Bezeichne mit $\mathbf{y}_h$, $\mathbf{y}_{h/2}$ die durch (sukzessive) Anwendung der impliziten Mittelpunktsregel mit Schrittweite h bzw. $h/2$ erhaltenen Näherungen für $\mathbf{y}(h)$.

Drücke den vom Extrapolationsverfahren gelieferten Näherungswert für $\mathbf{y}(h)$ durch $\mathbf{y}_{h/2}$ und $\mathbf{y}_h$ aus.

Hinweis: Verwende den folgenden Satz über die asymptotische Entwicklung des Diskretisierungsfehlers von Einschrittverfahren:

Theorem. Sei $\mathbf{y}_N$ der durch die Anwendung von $N := T/h$ Schritten eines Einschrittverfahrens der Ordnung p mit Schrittweite $h > 0$ erhaltene Näherungswert für $\mathbf{y}(T)$, wobei $\mathbf{y}(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, bezeichne.

Dann existieren glatte Funktionen $\mathbf{e}_i : [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^d$, $i = p, p+1, \ldots, p+k$, mit $k \in \mathbb{N}$, und eine (für hinreichend kleine h) gleichmässig beschränkte Funktion $(T, h) \mapsto \mathbf{r}_{k+p+1}(T, h)$, so dass

$$\mathbf{y}_N - \mathbf{y}(T) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{e}_{l+p}(T) h^{l+p} + \mathbf{r}_{k+p+1}(T, h) h^{k+p+1} \quad \text{für } h \to 0 \,.$$

mit $\mathbf{r}_{k+p+1}(T, h) = O(T - t_0)$ für $T - t_0 \to 0$ gleichmässig in $h < T$, *wobei zusätzlich* $\mathbf{e}_l(T) = O(T)$ *für* $T \to 0$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Welche Ordnung hat das Extrapolationsverfahren aus a)? Begründe deine Antwort.

c) Gib die diskrete Evolution $\boldsymbol{\Psi}^h(y)$ der impliziten Mittelpunktsregel für die logistische Differentialgleichung

$$\dot{y} = \lambda y(1-y), \quad \lambda > 0,$$

mit dem Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$ in geschlossenen Form an.

Hinweis: Die diskrete Evolution der impliziten Mittelpunktsregel führt auf eine quadratische Gleichung, die sich geschlossen lösen lässt.

d) Welche der beiden Lösungen aus c) ist zulässig? Begründe deine Antwort.

e) Ergänze das MATLAB-Template `m/a2/IMPExtrapLog.m`, das die extrapolierte Mittelpunktsregel für das Anfangswertproblem aus Teil c) implementieren soll.

Plotte sowohl dein numerische Ergebnis über das Zeitintervall $[0, 1]$ für den Parameterwert $\lambda = 10$ und Anfangswert $y(0) = 0.2$ als auch die exakte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1 + (y_0^{-1} - 1)e^{-\lambda t}}$$

in einer Figur und speichere den Plot in `m/a2/logistic.eps`.

f) Ergänze das MATLAB-Template `m/a2/IMPExtrapLogConv.m`, um die Konvergenzordnung der Extrapolationsverfahren mit der logistischen Differentialgleichung empirisch zu bestimmen. Dazu benutze das Anfangswertproblem aus Teil e) und die Schrittweiten $h = 1/2^n$, $n = 4, 5, \ldots, 9$. Speichere den relevanten Plot in der Datei `m/a2/conv.eps`.

3. *(5 Punkte)* Zeige, dass für die Stabilitätsfunktion eines symmetrischen Runge–Kutta Einschrittverfahrens gilt

$$|S(i\xi)| = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

4. *(10 Punkte)* Wir betrachten nun das gedämpfte mathematische Pendel

$$\ddot{y} = -\lambda \dot{y} - q(y), \tag{3}$$

wobei $q(0) = 0$ und q monoton steigend. Indem wir die Geschwindigkeit $v = \dot{y}$ einführen, können wir (3) als ein System erster Ordnung schreiben

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= -\lambda v - q(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Bitte wenden!

a) Die Energie des Systems ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2}v^2 + Q(y), \tag{5}$$

wobei Q die Stammfunktion von q bezeichnet.

Zeige, dass die Energie mit der Zeit monoton abnimmt.

b) Wir wollen nun (4) mit einem Splitting-Verfahren lösen, basierend auf folgender Zerlegung der rechten Seite

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -\lambda v \end{pmatrix} =: f(y,v) + g(y,v) \; .$$

Gib die exakten Teilevolutionen $\mathbf{\Phi}_f^t$, $\mathbf{\Phi}_g^t$ von $\left(\begin{smallmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{smallmatrix}\right) = f(y,v)$ und $\left(\begin{smallmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{smallmatrix}\right) = g(y,v)$ mit den Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ und $v(0) = v_0$ an.

Formuliere die diskrete Evolution für das Splitting-Verfahren nach Strang mit Schrittweite h bei exakter Lösung der Teilevolutionen.

c) Ergänze das MATLAB-Template `m/a4/DampPend.m`, das das Strang-Splitting-Verfahren aus Teilaufgabe b) mit uniformem Zeitschritt $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, zur Lösung des Systems (4) auf $[0, T]$ und Anfangswert $(y(0), v(0)) = (y_0, v_0)$ für allgemeine $q(y)$ mit einer minimalen Anzahl von Auswertungen der Funktion q implementieren soll.

d) Zeige (durch Gegenbeispiel), dass die auf dem Zeitgitter des Einschrittverfahrens ausgewertete Energie (5) beim Strang–Splitting Verfahren in einem Schritt auch zunehmen kann.