D-CHAB/D-BIOL | Grundlagen der Mathematik II | FS 2010
Dr. M. Dettling

Prüfung: Lineare Algebra und Statistik

2. Februar 2011

Prüfungsmodus: Schriftlich, 60 Minuten.

Hilfsmittel: Erlaubt sind beliebige schriftliche Hilfsmittel.

Kein Taschenrechner! Keine Handys!

- Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein neues Blatt Papier.
- Bearbeiten Sie die Multiple-Choice-Aufgaben auf dem separaten Lösungsblatt.
- Runden Sie die Dezimalstellen stets auf die zweite Stelle hinter dem Komma.
- Verwenden Sie die beigelegte Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, sowie die Quantilstabelle der t-Verteilung.

---

1. Gegeben seien eine reelle Zahl β und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) (4 P.) Bringen Sie die augmentierte Matrix (A, b) auf die allgemeine Zeilenstufenform.

b) (5 P.) Bestimmen Sie aus der Zeilenstufenform die folgenden Werte:

1. Die Anzahl Pivots des Gleichungssystems $Ax = b$.
2. Den Rang der augmentierten Matrix (A, b).
3. Die Dimension des homogenen Lösungsraums L von $Ax = 0$.
4. Die Dimension des Vektorraums S, der von den Spalten von A aufgespannt wird.
5. Den Wert von β, für den das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist.

⇢ *Tragen Sie die Ergebnisse ins Multiple-Choice-Lösungsblatt ein.*

c) (4 P.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$ für den oben gefundenen Wert von β.

Bitte wenden!

2. Gegeben seien

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 P.) Berechnen Sie CD und ihre Determinante.

b) (4 P.) Berechnen Sie DC und, falls möglich, ihre Inverse.

c) (5 P.) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und sei

$$M_n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & n & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von M_n.

d) (2 P.) Für welche n ist die Matrix M_n diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Eine Firma stellt Autoreifen her, deren Lebensdauer normalverteilt ist. Eine Stichprobe von 100 Reifen ergibt einen Mittelwert von $\overline{x}$ =49'200km. Es wird angenommen, dass die tatsächliche Standardabweichung der Lebensdauer eines Reifens 5'000km beträgt.

a) (2 P.) Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die mittlere Lebensdauer.

b) (3 P.) Der Direktor der Firma behauptet, dass ihre Produkte eine mittlere Lebensdauer von 50'000km hätten. Testen Sie auf dem Niveau von 5% die Behauptung des Direktors. Geben Sie Dazu Nullhypothese, Alternative und Testentscheidung an.

c) (2 P.) Wie gross ist der P-Wert?

d) (2 P.) Nehmen Sie jetzt an, dass die Standardabweichung von 5'000km aufgrund der Stichprobe geschätzt wurde.

1. Ändert sich dadurch die Testentscheidung?
   - i) Ja.
   - ii) Nein.
   - iii) Keine Antwort möglich.
2. Wie verändert sich dadurch das Konfidenzintervall?
   - i) Es wird grösser.
   - ii) Es wird kleiner.
   - iii) Es bleibt gleich.
   - iv) Keine Entscheidung möglich.

--→ *Tragen Sie die Ergebnisse ins Multiple-Choice-Lösungsblatt ein.*

4. Ein Professor vermutet einen Zusammenhang zwischen den Resultaten seiner Studenten an drei Tests T_1, T_2 und T_3 während dem Semester und an der Prüfung am Ende des Jahres. Folglich fertigt er eine lineare Regression mit Mathematica an, die folgenden Output liefert:

```
Test = LinearModelFit[DatenTest, {T1, T2, T3}, {T1, T2, T3}]

Test["FitResiduals"]

{-0.0122818, 0.00644628, -0.0937635, 0.11053, -0.0971359,
 0.0107323, 0.112509, -0.0205021, -0.113592, -0.0351972,
 -0.165014, -0.16243, 0.09449, 0.0556566, -0.00512224,
 0.0164672, -0.0294465, 0.0705575, 0.236576, 0.02052}

Test["ParameterTable"]
```

	Estimate	Standard Error	t Statistic	P-Value
1	-0.2	0.168646	-1.13918	0.271396
T1	0.2	0.0841523	2.04207	0.0579873
T2	0.3	0.0820403	3.88342	0.00131904
T3	0.6	0.0860069	6.50857	7.20947×10^{-6}

a) (1 P.) Wieviele Studenten haben an den Tests teilgenommen?

i) 20
ii) 22
iii) 24
iv) Kann anhand des Outputs nicht entschieden werden.

⇢ *Tragen Sie das Ergebnis ins Multiple-Choice-Lösungsblatt ein.*

b) (2 P.) Wie lautet die von Mathematica aufgestellte Regressionsgleichung?

c) (1 P.) Welches Testresultat hat nach dem Regressionsmodell den grössten Einfluss aufs Prüfungsresultat?

i) T_1
ii) T_2
iii) T_3
iv) Alle drei Tests haben denselben Einfluss.

⇢ *Tragen Sie das Ergebnis ins Multiple-Choice-Lösungsblatt ein.*

d) (2 P.) Welche Prüfungsnote sagt das Regressionsmodell voraus für jemand, der an der ersten Prüfung 4.3, an der zweiten 4.2 und an der dritten 4.6 erreicht hat? (Die Noten sind auf die erste Stelle hinter dem Komma aufgerundet.)

e) (2 P.) Geben Sie ein Notentripel an, für welches das Modell die Prüfungsnote 4 voraussagt.

f) (5 P.) Bestimmen Sie ein 90%-Konfidenzintervall für den Koeffizienten von T_2 in der Regressionsgleichung. Warum ist aus dem Output bereits klar, dass es den Wert 0 nicht enthält?