Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

Marcel Dettling

Institute für Datenanalyse und Prozessdesign

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

marcel.dettling@zhaw.ch

http://stat.ethz.ch/~dettling

ETH Zürich, 24. März, 2010

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

3.4. Die Inverse einer Matrix

- die Inverse ist nur für quadratische Matrizen definiert
- Geometrie: Matrizen definieren lineare Abbildungen. Die Inverse ist die Umkehrabbildung, sie existiert nicht immer
- die Inverse wird mit dem Gauss-Algorithmus bestimmt. Es gilt, 3 LGS mit identischen Koeffizienten, aber unterschiedlichen rechten Seiten zu lösen.
- die Klasse der Matrizen, für welche die Inverse existiert, wird **regulär** genannt. Falls die Inverse nicht existiert, so heisst die Matrix **singulär**.

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

Zusammenhang Inverse/LGS

- Es besteht (schon aus der Berechnung der Inversen) ganz offensichtlich ein Zusammenhang zwischen der Existenz der Inversen von A und der Existenz der Lösung des LGS von A.

Satz 2.7:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent, d.h. wenn eine davon gilt, so gelten alle anderen auch. Sei A eine (n x n)-Matrix.

i) **A ist invertierbar bzw. regulär**
ii) **A hat Rang n**
iii) **Ax=b ist für jede rechte Seite lösbar**
iv) **Ax=0 hat nur die triviale Lösung**

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

Lösen eines LGS mit der Inversen

LGS können auch mit der Inversen gelöst werden:

$$\mathbf{Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff I_n x = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b}$$

Aber:

Das Lösen eines LGS durch die Verwendung der Inversen ist ein schlechter, ineffizienter Weg.

Es entsteht grösserer Aufwand (GA mit nx statt nur 1x RWE, dazu noch eine Matrixmultiplikation.

Zudem ist die Anfälligkeit auf Rundungsfehler viel grösser.

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

3.5. Orthogonale Matrizen

- Orthogonale Matrizen beschreiben **längentreue Abbildungen** vom R^n in den R^n, also z.B. reine Drehungen oder auch reine Spiegelungen.
- Sie sind wichtig für die Ausgleichsrechnung, das Eigenwert-problem, usw. (...siehe später):

Definition:

Eine (n x n)-Matrix A heisst orthogonal, falls $A^TA = I_n$ gilt.

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

Rechenregeln für orthogonale Matrizen

Definition:

Eine (n x n)-Matrix A heisst orthogonal, falls $A^TA = I_n$ gilt.

Satz 2.8:

Seien A und B orthogonale (n x n)-Matrizen. Dann gilt:

i) **A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$**
ii) **A^{-1} ist orthogonal**
iii) **AB ist orthogonal**
iv) **I_n ist orthogonal**

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

4. Determinanten

4.1. Eigenschaften und Interpretation

Die Determinante existiert nur für quadratische (n x n)-Matrizen A und ordnet ihnen eine Zahl zu, welche die Eigenschaften in Bezug auf LGS, Inverse, Eigenwerte, etc. charakterisiert.

Schreibweise: det(A) = |A|

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2010 – Woche 05

Geometrische Interpretation

- Die Determinante ist das **Volumen des Spats**, der von den Spaltenvektoren von A im R^n aufgespannt wird.
- Wenn dieses Volumen (und die Det.) 0 ist, so liegen die Spaltenvektoren in einem Unterraum des R^n (z.B. Gerade im R^2, Ebene im R^3, ...)
- Dies hat entsprechende Auswirkungen auf die Lösbarkeit von durch die Matrix A definierte LGS.
- Daraus folgt, dass die Determinante auch die Existenz der Inversen bestimmt. Reguläre Matrizen haben Determinante≠0.