Vereinbarung: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.
Um Beweise und Definitionen zu vereinfachen sei im Folgenden A der Hauptidealring $\mathbb{F}_q[T]$, $q = p^n$, p prim. Alle Sätze gelten aber auch für allgemeines A, für dessen Definition wir auf den Vortrag über die algebraische Definition von Drinfeld-Moduln verweisen. Allerdings lässt sich der Tate-Modul im Allgemeinen nicht so einfach definieren, wie wir dies tun werden, vgl. [Goss, Kapitel 4.10]. Ferner sei K im Folgenden ein Körper, der mit einem $\mathbb{F}_q$-linearen Ringhomomorphismus $\gamma : A \to K$ versehen ist. Wenn wir von Drinfeld-A-Modulen über K sprechen, so werden wir γ stets stillschweigend voraussetzen.
Zudem setzen wir noch $\mathfrak{p}_0 := \ker(\gamma)$.

1 Isogenien

Definition 1 (Morphismus).
Seien ϕ, ψ zwei Drinfeld-A-Modulen über K. Dann heisst ein Polynom $\lambda \in K\{\tau\}$ ein Morphismus von ϕ nach ψ, falls $\lambda \circ \phi_a = \psi_a \circ \lambda$ für alle $a \in A$. Dies notieren wir durch $\lambda : \phi \to \psi$.
Die Menge aller Morphismen $\lambda : \phi \to \psi$ bezeichnen wir mit $Hom_A(\phi, \psi)$.
Mit $a \cdot \lambda := \psi_a \circ \lambda = \lambda \circ \phi_a$ ist $Hom_A(\phi, \psi)$ ein torsionsfreier A-Modul.

Definition 2 (Isogenie, Isomorphismus).
Ein nichttrivialer Morphismus $0 \neq \lambda \in Hom_A(\phi, \psi)$ heisst Isogenie.
Ein invertierbarer Morphismus $\lambda \in Hom_A(\phi, \psi)$, d.h. ein $\lambda : \phi \to \psi$ mit $\deg(\lambda) = 0$*, heisst Isomorphismus.*

Bemerkung 3 (Modulstruktur via ϕ).
Sei ϕ ein Drinfeld-A-Modul über K und B eine K-Algebra. Dann erhält B eine A-Modulstruktur via ϕ, dadurch dass man $a * b := \phi_a(b)$ for $a \in A$, $b \in B$ definiert.
Insbesondere wird $(K^{alg}, +)$ auf diese Weise zu einem A-Modul.

Lemma 4. *Der Ring $K\{\tau\}$ ist ein rechts-euklidscher Ring, d.h. für alle α, $0 \neq \beta \in K\{\tau\}$ existieren eindeutige γ, $\delta \in K\{\tau\}$, so dass*

$$\alpha = \gamma \circ \beta + \delta \qquad \textit{mit } \deg(\delta) < \deg(\beta).$$

Beweis. Der Beweis ähnelt dem für Polynomringe über einem Körper. Wir verwenden Induktion nach $deg(\alpha)$: Im Fall $deg(\alpha) < deg(\beta)$ kann man einfach $\gamma = 0$ und $\delta = \alpha$ wählen. Für $0 \leq deg(\beta) \leq deg(\alpha)$ seien $\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i \tau^i$ und $\beta = \sum_{i=0}^n \beta_i \tau^i$. Dann hat $\alpha' = \alpha - \alpha_m \beta_n^{-q^{(m-n)}} \tau^{m-n} \circ \beta$ einen kleineren Grad als α. Also existieren nach Induktionsvoraussetzung γ', $\delta' \in K\{\tau\}$, so dass $\alpha' = \gamma' \circ \beta + \delta'$, $deg(\delta') < deg(\beta)$. Dann ist

$$\alpha = (\gamma' + \alpha_m \beta_n^{-q^{(m-n)}} \tau^{m-n}) \circ \beta + \delta'$$

die gewünschte Zerlegung.
Ein einfaches Gradargument zeigt, dass die Zerlegung eindeutig ist. □

Korollar 5. *Für den Ring $K\{\tau\}$ gilt die Kürzungsregel von rechts, d.h. aus $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in K\{\tau\}$, $0 \neq \gamma$ folgt $\alpha = \beta$.*

Lemma 6. *Seien $\alpha, \beta \in K\{\tau\}$ gegeben, so dass jede Nullstelle von α in K^{alg} auch Nullstelle von β mit mindestens derselben Multiplizität ist. Dann existiert ein $\gamma \in K\{\tau\}$, so dass $\beta = \gamma \circ \alpha$.*

Beweis. O.B.d.A. kann man $\alpha \neq 0$ annehmen. Sicher gilt $deg(\alpha) \leq deg(\beta)$. Da ferner $K\{\tau\}$ rechts-euklidsch ist, exisitieren γ und $\delta \in K\{\tau\}$, so dass $\beta = \gamma \circ \alpha + \delta$ mit $grad(\delta) < grad(\alpha)$. Da nun δ in K^{alg} mindestens die Nullstellen von α mit derselben Multiplizität hat, folgt daraus $\delta = 0$ und damit die Behauptung. $\square$

Proposition 7. *Seien ϕ und ψ zwei Drinfeld-A-Modulen über K und $\lambda \in Hom_A(\phi, \psi)$ eine Isogenie. Dann existiert ein $a \in A$ und eine Isogenie $\widehat{\lambda} \in Hom_A(\psi, \phi)$ mit $\phi_a = \widehat{\lambda} \circ \lambda$.*

Beweis. Betrachte $Ker(\lambda)(K^{alg}) := \{b \in K^{alg} \mid \lambda(b) = 0\}$. Dies ist ein endlicher A-Modul via ϕ, daher gibt es nach dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen eine endliche Menge P von Primelementen aus A und natürliche Zahlen r_p, $p \in P$, und (p, j_p), $p \in P$, $1 \leq j_p \leq r_p$, so dass

$$Ker(\lambda)(K^{alg}) \cong \bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{j_p=1}^{r_p} (A/p^{\nu(p,j_p)}A).$$

Also existiert ein $0 \neq a$, nämlich z.B. $\prod_{p,j_p} p^{\nu(p,j_p)}$, so dass $Ker(\lambda)(K^{alg})$ von ϕ_a annuliert wird. Wir müssen allerdings noch sicherstellen, dass jede Nullstelle von ϕ_a in K^{alg} auch eine höhere Multiplizität als die entsprechende Nullstelle von λ hat. Dazu machen wir nun eine Fallunterscheidung nach der Charakteristik von ϕ:
Hat ϕ generische Charakteristik, d.h. ist $char(\phi) = (0)$, so ist λ als Isogenie ohnehin seperabel: Betrachte nämlich ein beliebiges $0 \neq b \in A$, dann gilt $ht(\phi_b) = 0$ und $\lambda \circ \phi_b = \psi_b \circ \lambda$. Ein Koeffizientenvergleich bei $\tau^{ht(\lambda)}$ liefert $\lambda_{ht(\lambda)} \partial_0(\phi_b)^{q^{ht(\lambda)}} = \partial_0(\psi_b)\lambda_{ht(\lambda)}$, wobei $0 \neq \lambda_{ht(\lambda)}$ der niedrigste nicht verschwindene Koeffizient von λ ist. Daraus folgt nun allerdings $\gamma(b)^n - \gamma(b) = 0$ für alle $b \in A$ und $n = q^{ht(\lambda)}$. Wäre λ inseperabel, d.h. $ht(\lambda) > 0$, so folgt daraus aber $|im(\gamma)| < \infty$. Da wir $A = F_q[T]$ annehmen, ergibt sich ein Widerspruch zu $ker(\gamma) = \{0\}$.
Habe ϕ nun endliche Charakteristik. Dann gibt es ein $0 \neq b \in A$ mit $\phi_b \neq 0$ (beachte, dass ϕ injektiv nach Proposition 16 aus dem Vortrag über die algebraische Definition von Drinfeld-Moduln) und $ht(\phi_b) > 0$. Weil die Höhe additiv ist, kann man k so wählen, dass alle Nullstellen von $\phi_{ab^k} = \phi_{b^k} \circ \phi_a$ beliebig grosse Multiplizität haben.
In beiden Fällen kann man also annehmen, dass ϕ_a und λ die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllen, ergo gibt es ein $\widehat{\lambda} \in K\{\tau\}$, so dass $\phi_a = \widehat{\lambda} \circ \lambda$. Nunmehr ist nur noch zu zeigen, dass $\widehat{\lambda}$ auch eine Isogenie ist. Dazu beachte, dass

$$\widehat{\lambda} \circ \psi_b \circ \lambda = \widehat{\lambda} \circ \lambda \circ \phi_b = \phi_a \circ \phi_b = \phi_b \circ \phi_a = \phi_b \circ \widehat{\lambda} \circ \lambda.$$

Da wir von rechts kürzen können nach Korollar 5 folgt damit $\widehat{\lambda} \circ \psi_b = \phi_b \circ \widehat{\lambda}$, also ist $\widehat{\lambda}$ eine Isogenie. $\square$

Korollar 8. *Es existiert die folgende Isogenie-Äquivalenzrelation:*
ϕ und ψ heissen isogen, falls $Hom_A(\phi, \psi)$ eine Isogenie enthält.
Invarianten unter dieser Relation sind der Rang und die Charakteristik.

2 Tate-Modul und Tate-Algebra

In Analogie zum p-adischen Tate-Modul $T_p(E)$ einer elliptischen Kurve E definieren wir nun den $\mathfrak{p}$-adischen Tate-Modul $T_\mathfrak{p}(\phi)$ eines Drinfeld-Moduls ϕ. Bevor wir dies allerdings tun, wollen wir noch kurz den Begriff des projektiven oder inversen Limes erörtern. Zur Vereinfachung wollen wir diesen Begriff jedoch nur so abstrakt definieren, wie wir ihn für den Tate-Modul brauchen.

Definition 9. *Sei $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Menge von Gruppen und $\phi_i : G_{i+1} \to G_i$ eine dazugehörige Menge von Gruppenhomomorphismen.*
Dann definiere den inversen Limes durch

$$\varprojlim_i G_i := \{(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_i G_i \mid \phi_i(g_{i+1}) = g_i\}.$$

Dies ist offensichtlich eine Untergruppe des direkten Produkts $\prod_i G_i$.

Bemerkung 10. *Der inverse Limes erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Sei H eine Gruppe und seien $\psi_i : H \to G_i$ Gruppenhomomorphismen, die $\psi_i = \phi_i \circ \psi_{i+1}$ erfüllen, d.h. mit den ϕ_i verträglich sind. Dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\psi : H \to \varprojlim G_i$, so dass $\psi_i = \pi_i \circ \psi$, wobei π_i die Einschränkung der i-ten Projektion des direkten Produkts $\prod_i G_i$ ist.*

Nun sind wir in der Lage den Tate-Modul zu definieren: Dazu betrachten wir für positives n und ein Primideal $(0) \neq \mathfrak{p}$ von A den $A/\mathfrak{p}^n$-Modul

$$\phi[\mathfrak{p}^n] := Ker(\phi_{\mathfrak{p}^n})(K^{alg}) = \{b \in K^{alg} \mid \forall a \in \mathfrak{p}^n :\ a * b = \phi_a(b) = 0\},$$

wobei K^{alg} mit der A-Modulstruktur via ϕ versehen wird, wobei $\phi[\mathfrak{p}^n]$ ein Untermodul wird. Diese induziert offensichtlich sogar eine $A/\mathfrak{p}^n$-Modulstruktur auf $\phi[\mathfrak{p}^n]$. Nach Satz 27 aus dem Vortrag über die algebraische Definition von Drinfeld-Moduln wissen wir, dass der Rang von $\phi[\mathfrak{p}^n]$ gleich dem Rang r von ϕ ist, falls $\mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{p}$, und sonst gleich $r - h$, wobei h die Höhe von ϕ bezeichnet.
Wie im Fall elliptischer Kurven wollen wir nun die gesamte Information über die $\mathfrak{p}$-Torsion in einem Objekt zusammenfassen. Dazu bilden wir zu einem Primideal $\mathfrak{p} = (\pi)$, π ein normiertes primes Polynom aus $\mathbb{F}_q[T] = A$, den inversen Limes

$$T_\mathfrak{p}(\phi) := \varprojlim_n \phi[\mathfrak{p}^n],$$

wobei wir die Gruppenhomomorphismen $\phi[\mathfrak{p}^{n+1}] \to \phi[\mathfrak{p}^n]$, $x \mapsto \pi * x = \phi_\pi(x)$ zugrunde legen. Weil $\phi[\mathfrak{p}^n]$ ein $A/\mathfrak{p}^n$-Modul ist, wird $T_\mathfrak{p}(\phi)$ zu einem $A_\mathfrak{p}$-Modul.

Dabei bezeichnet $A_{\mathfrak{p}}$ die Vervollständigung von A bezüglich $\mathfrak{p}$, d.h. den inversen Limes $\varprojlim(A/\mathfrak{p}^n)$ (von Ringen) bezüglich der üblichen Restriktionsabbildungen $A/\mathfrak{p}^{n+1} \to A/\mathfrak{p}^n$.
Der so entstandene $A_{\mathfrak{p}}$-Modul heisst Tate-Modul $T_{\mathfrak{p}}(\phi)$.
Ferner definieren wir nunmehr noch den $F_{\mathfrak{p}}$-Vektorraum

$$V_{\mathfrak{p}}(\phi) = T_{\mathfrak{p}}(\phi) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} F_{\mathfrak{p}},$$

wobei $F_{\mathfrak{p}}$ der Quotientenkörper von $A_{\mathfrak{p}}$ ist. $V_{\mathfrak{p}}(\phi)$ heisst die $\mathfrak{p}$-adische Tate-Algebra von ϕ.

Bemerkung 11. *Es existiert ein natürlicher Homomorphismus*

$$Hom_A(\phi, \psi) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi)).$$

Es existiert nämlich ein natürlicher A-linearer Homomorphismus $Hom_A(\phi, \psi) \to Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi))$, der durch

$$\lambda \mapsto (\lambda_{\mathfrak{p}} \colon T_{\mathfrak{p}}(\phi) \to T_{\mathfrak{p}}(\psi), (x_i)_i \mapsto (\lambda(x_i))_i)\,,$$

gegeben ist. Die angegebene Abbildung ist nämlich wohldefiniert, da für $(x_i)_i \in T_{\mathfrak{p}}(\phi)$ offenbar $\pi *_{\psi} (\lambda(x_{i+1})) = (\psi_\pi \circ \lambda)(x_{i+1}) = (\lambda \circ \phi_\pi)(x_{i+1}) = \lambda(x_i)$ gilt, also $(\lambda(x_i))_i \in T_{\mathfrak{p}}(\psi)$. Ferner ist die Abbildung $\lambda_{\mathfrak{p}}$ $A_{\mathfrak{p}}$-linear, weil $\lambda : \phi \to \psi$ ein Morphismus von Drinfeld-Modulen ist. Die Zuordnung $\lambda \mapsto \lambda_{\mathfrak{p}}$ ist ausserdem wie behauptet ein A-linearer Homomorphismus, da $(\psi_a \circ \lambda)_{\mathfrak{p}}(x_i)_i = ((\psi_a \circ \lambda)(x_i))_i = a \cdot \lambda_{\mathfrak{p}}((x_i)_i)$.
Der A-Homomorphismus $\lambda \mapsto \lambda_{\mathfrak{p}}$ setzt sich nun kanonisch auf das Tensorprodukt fort.

Proposition 12. *Seien ϕ und ψ zwei Drinfeld-Moduln über K. Dann ist für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0$ von A der natürliche Homomorphismus*

$$f : \; Hom_A(\phi, \psi) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi))$$

injektiv.

Beweis. Betrachte den Homomorphismus

$$Hom_A(\phi, \psi)/\pi^n Hom_A(\phi, \psi) \to Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi))/\pi^n Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi)),$$

der von dem obigen A-linearen Homomorphismus $\lambda \mapsto \lambda_{\mathfrak{p}}$ induziert wird. Wir zeigen nun, dass dieser injektiv ist. Denn angenommen ein $[\lambda]$, $\lambda \in Hom_A(\phi, \psi)$, wird durch ihn auf $[0]$, $0 \in Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi))$, abgebildet. Dann gilt $\lambda = \pi^n \cdot f$ für ein $f \in Hom_{A_{\mathfrak{p}}}(T_{\mathfrak{p}}(\phi), T_{\mathfrak{p}}(\psi))$, wobei π^n als Element von A_p aufgefasst wird. Betrachtet man die Wirkung von $\lambda = \pi^n \cdot f$ auf die n-te Komponente $\phi[\mathfrak{p}^n]$ von $T_{\mathfrak{p}}(\phi)$, so erhält man $\lambda(\phi[\mathfrak{p}^n]) = \{0\}$, denn ψ_{π^n} annuliert per definitionem $\psi[\mathfrak{p}^n]$. Da ϕ_{π^n} separabel ist wegen $(\pi) = \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0 = ker(\gamma)$ gilt nach Lemma 6, dass ein $\mu \in K\{\tau\}$ existiert, so dass $\lambda = \mu \circ \phi_{\pi^n}$. Da allerdings für alle $b \in A$

$$\mu \circ \phi_b \circ \phi_{\pi^n} = \mu \circ \phi_{\pi^n} \circ \phi_b = \lambda \circ \phi_b = \psi_b \circ \lambda = \psi_b \circ \mu \circ \phi_{\pi^n}$$

gilt, liegt μ sogar in $Hom_A(\phi,\psi)$. Daher gilt $[\lambda] = [\psi_{\pi^n} \circ \mu] = 0$, also ist der Homomorphismus in der Tat injektiv.
Da $Hom_A(\phi,\psi)$ und $Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi))$ torsionsfrei sind, gibt es kanonische Isomorphien

$$Hom_A(\phi,\psi)/\pi^n Hom_A(\phi,\psi) \cong Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A (A/\pi^n A) \text{ sowie}$$

$$Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi))/\pi^n Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \cong Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\pi^n A_\mathfrak{p})$$

Also erhalten wir einen injektiven Homomorphismus

$$Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A (A/\pi^n A) \to Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\pi^n A_\mathfrak{p}).$$

Daraus erhalten wir einen Homomorphismus von additiven Gruppen

$$\varprojlim_n (Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A (A/\pi^n A)) \to Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\pi^n A_\mathfrak{p}),$$

der sich wegen der universellen Eigenschaft des inversen Limes zu einem Homomorphismus

$$\varprojlim_n (Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A (A/\pi^n A)) \to \varprojlim_n \big(Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\pi^n A_\mathfrak{p})\big)$$

fortsetzt, der wiederum injektiv ist.
Wir erhalten also wiederum einen injektiven Homomorphismus

$$Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A \varprojlim_n (A/\pi^n A) \to Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi)) \otimes_{A_\mathfrak{p}} \varprojlim_n (A_\mathfrak{p}/\pi^n A_\mathfrak{p}),$$

d.h. einen Homomorphismus $Hom_A(\phi,\psi) \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow Hom_{A_\mathfrak{p}}(T_\mathfrak{p}(\phi), T_\mathfrak{p}(\psi))$.
Da dieser Homomorphismus mit dem oben definierten natürlichen Homomorphismus übereinstimmt, ist dieser wie behauptet injektiv. $\square$