

Numerical Analysis Seminar:  
The Top-Ten Computational Algorithms in Science and  
Engineering  
FS 08

## Der Simplexalgorithmus

**Autoren:**

Nicoletta Andri (Teil 1)

Reto Hobi (Teil 2)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Simplex Algorithmus I</b>	<b>1</b>
1.1	Einführungsbeispiel . . . . .	1
1.2	Wiederholung: Lineare Algebra . . . . .	4
1.3	Polyedrische Mengen . . . . .	5
1.4	Dualität . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Der Simplex Algorithmus II</b>	<b>13</b>
2.1	Aufgabenstellung . . . . .	13
2.2	Herleitung des Simplex-Algorithmus . . . . .	13
2.3	Der Simplex Algorithmus - geometrisch . . . . .	16
2.4	Tableauform . . . . .	16
2.5	Beispiel . . . . .	19
2.6	Konvergenz . . . . .	20
2.7	Laufzeit . . . . .	22

# 1 Der Simplex Algorithmus I

## 1.1 Einführungsbeispiel

(Referenz: [www.ifor.math.ethz.ch/teaching/lectures/einfopt/serie1.pdf](http://www.ifor.math.ethz.ch/teaching/lectures/einfopt/serie1.pdf))

In einer Papiermühle wird aus Altpapier und anderen Vorstoffen feines und grobes Papier hergestellt. Der Erlös pro Tonne feines Papier beläuft sich auf 10 Einheiten und für grobes Papier auf 7.5 Einheiten. Der Altpapierverbrauch beträgt 0.6 Tonnen pro Tonne grobes Papier und eine Tonne pro Tonne feines Papier. Maximal können 15 Tonnen Altpapier verarbeitet werden. Die Herstellung von einer Tonne feinem Papier erfordert 50 Kilogramm Vorstoffe und für eine Tonne grobes Papier werden 10 Kilogramm Vorstoffe benötigt. Es stehen höchstens 500 Kilogramm Vorstoffe zur Verfügung.

Welches Produktionsprogramm bringt den grössten Erlös, wenn maximal 20 Tonnen grobes Papier abgesetzt werden können?

Wir bezeichnen nun mit  $x_1$  die Anzahl produzierter Tonnen feines Papier und mit  $x_2$  die Anzahl Tonnen grobes Papier. Dann ist der Erlös

$$10x_1 + 7.5x_2.$$

Dies ist die sogenannte Zielfunktion.

Die Zielfunktion soll maximiert werden unter den folgenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}x_1 + 0.6x_2 &\leq 15, && \text{(Altpapier)} \\50x_1 + 10x_2 &\leq 500, && \text{(Vorstoffe)} \\x_2 &\leq 20. && \text{(Grobpapier)}\end{aligned}$$

Ausserdem müssen wir sicherstellen, dass die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  nicht negativ sind. Wir fordern also zusätzlich

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Da sowohl Zielfunktion wie auch Nebenbedingungen linear in  $x_1$  und  $x_2$  sind, sprechen wir bei diesem Problem von einem linearen Programm oder kurz (*LP*). Wir möchten also folgendes (*LP*) lösen:

$$\begin{aligned}\max & \quad 10x_1 + 7.5x_2 \\ \text{unter} & \quad x_1 + 0.6x_2 \leq 15 \\ & \quad 50x_1 + 10x_2 \leq 500 \\ & \quad x_2 \leq 20 \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

## Graphische Interpretation

Damit ein Punkt zulässig ist, muss er gleichzeitig alle Nebenbedingungen erfüllen, einschliesslich Nichtnegativität. Deshalb nennt man diese Punkte zulässige Lösungen und die Menge aller zulässigen Lösungen heisst zulässiges Gebiet.

Offensichtlich stellt jede Nebenbedingung ein Halbraum dar, in unserem 2D-Beispiel die eine Seite der entsprechenden Gerade. Das zulässige Gebiet ist demnach der Durchschnitt dieser Halbräume, also ein konvexes Polyeder.

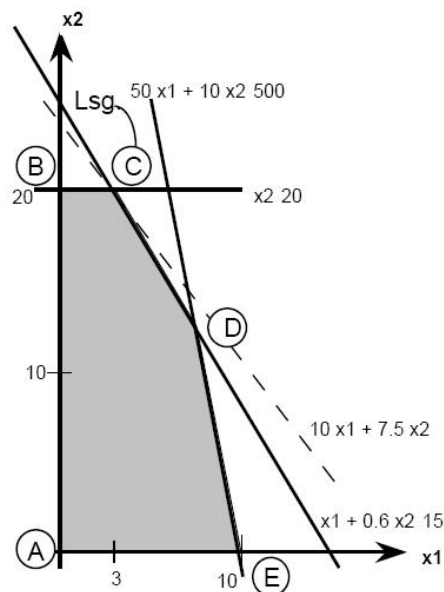


Abbildung 1: Graphische Lösung des (LP)

Besitzt eine Grenze einer Nebenbedingung keinen gemeinsamen Punkt mit dem zulässigen Gebiet, so heisst diese Nebenbedingung redundant. Redundante Nebenbedingungen können ohne Einschränkung aus den Betrachtungen gestrichen werden.

Die Zielfunktion ist eine Kurvenschar. Sie beschreibt den Term, der maximiert werden soll. In unserem Beispiel ist dies der Erlös

$$\text{ZF: } z = 10x_1 + 7.5x_2.$$

Im 2D-Fall sind die Niveaulinien für beliebige  $z$ -Werte Geraden. Ändert sich der Wert von  $z$ , so verschiebt sich die Niveaulinie parallel dazu.

Eine optimale Lösung findet man, indem man die Niveaulinie der Zielfunktion parallel in Richtung zunehmender Zielfunktionswerte verschiebt, bis sie das zulässige Gebiet gerade noch berührt. Für die Papiermühle ist die optimale Lösung folglich der Punkt  $C$  mit  $(x_1, x_2) = (3, 20)$ . Der maximale Erlös beträgt somit 180 Einheiten. Die Optimallösung wird in einem Eckpunkt oder sogenanntem Extrempunkt angenommen.

## Mathematische Formulierung

Kanonische Struktur eines linearen Programms:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hierbei bezeichnet  $n$  die Anzahl Variablen und  $m$  die Anzahl Nebenbedingungen.

In Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Wobei wir mit  $v_1 \leq v_2$  meinen, dass komponentenweise „ $\leq$ “ gelten soll.

Durch die Einführung von sogenannten Schlupfvariablen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  lässt sich die kanonische Form auf die sogenannte Standardform bringen, nämlich

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{unter} & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Die Einführung von Schlupfvariablen würde bei unserem Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 0.6x_2 + y_1 & = & 15 \quad (\text{Altpapier}) \\ 50x_1 + 10x_2 + y_2 & = & 500 \quad (\text{Vorstoffe}) \\ x_2 + y_3 & = & 20 \quad (\text{Grobpapier}) \end{array}$$

## 1.2 Wiederholung: Lineare Algebra

Wir müssen oft Gleichungssysteme der folgenden Form lösen:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

Hierzu bietet sich das Gaussverfahren an.

Um die Anzahl Lösungen von  $Ax = b$  zu bestimmen, muss man eine Fallunterscheidung machen.

1.  $r(A|b) > r(A)$   
 $Ax = b$  hat keine Lösung, weil sich  $b$  nicht als Linearkombination der Spaltenvektoren von  $A$  darstellen lässt.
2.  $r(A|b) = r(A) = \min(m, n), n \leq m$   
 $Ax = b$  hat genau eine Lösung.
3.  $r(A|b) = r(A) = \min(m, n), m < n$   
 $Ax = b$  hat unendlich viele Lösungen.
4.  $r(A|b) = r(A) < \min(m, n)$   
 $Ax = b$  enthält  $k = \min(m, n) - r(A)$  redundante Gleichungen, die gestrichen werden können. Nach dem Streichen dieser Gleichungen befinden wir uns entweder im zweiten oder im dritten Fall.

Uns interessiert offensichtlich nur der dritte Fall. Wir gehen also im Folgenden von  $r(A) = m$  aus. Dann können wir  $A$  folgendermassen umordnen.

$$A = [B|N], \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ regulär}, N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

Entsprechend müssen wir auch  $x$  umordnen.

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von  $x_B$  heissen Basisvariablen,  $x_N$  sind die Nichtbasisvariablen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} Ax &= [B|N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \\ &= Bx_B + Nx_N \\ &= b. \end{aligned}$$

Der  $(n - m)$ -dimensionale Lösungsraum lässt sich folglich beschreiben als

$$\mathbb{L} = \{(x_B, x_N)^T \mid x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ beliebig}\}.$$

Eine sogenannte Basislösung von  $Ax = b$  erhält man, indem man die Nichtbasisvariablen gleich Null setzt:

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Wahl von  $B$  nicht eindeutig ist, gibt es natürlich mehrere Basislösungen.

### 1.3 Polyedrische Mengen

**Definition:** (Polyeder)

Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heisst polyedrische Menge oder einfach Polyeder, falls  $\Omega$  ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen ist, das heisst von der Form

$$\begin{aligned}\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, y \geq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Wenn man noch zusätzlich Nichtnegativität fordert, dann gilt

$$\begin{aligned}\Omega' &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ein Polyeder ist offensichtlich konvex.

**Definition:** (Extremalpunkt)

Ein Punkt  $x$  einer konvexen Menge  $X$  heisst Extremalpunkt, falls aus

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad x_1, x_2 \in X, \lambda \in (0, 1)$$

folgt, dass

$$x_1 = x_2 = x.$$

**Satz:** (Zusammenhang Basislösung-Extremalpunkt)

Betrachte  $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $r(A) = m (\leq n)$ .

$x \in P$  ist Extremalpunkt genau dann wenn sich  $A$  zerlegen lässt in  $A = [B|N]$

mit  $B$  regulär,  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $B^{-1}b \geq 0$ .

**Beweis:**

„ $\implies$ “:

Sei  $A = [B|N]$ ,  $B$  regulär,  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1}b \geq 0$ .

Zu zeigen:  $x$  ist extremal

Sei  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ,  $x_1, x_2 \in P$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

Setze  $x_1 = \begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{1N} \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} x_{2B} \\ x_{2N} \end{pmatrix}$ .

Dann gelten

$$\begin{aligned}B^{-1}b &= \lambda x_{1B} + (1 - \lambda)x_{2B}, \\ 0 &= \lambda x_{1N} + (1 - \lambda)x_{2N}.\end{aligned}$$

Weil  $x_1, x_2 \in P$  gilt, sind alle Komponenten nichtnegativ. Deshalb folgt aus der zweiten Gleichung

$$x_{1N} = x_{2N} = 0.$$

Aufgrund der Zulässigkeit von  $x_1$  und  $x_2$  folgt aus der ersten Gleichung

$$x_{1B} = x_{2B} = B^{-1}b.$$

Damit ist die eine Richtung gezeigt.

„ $\implies$ “:

Sei  $x \in P$  extremal.

Zu zeigen: Es gibt eine entsprechende Zerlegung  $A = [B|N]$  und  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $B^{-1}b \geq 0$ .

Ordne  $A$  so, dass  $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$ .

*Behauptung:* Die ersten  $k$  Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.

*Annahme:* Die ersten  $k$  Spalten von  $A$  seien linear abhängig.

Dann gibt es ein  $\mu \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mu \neq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \mu_i a_i = 0$  bzw.  $A \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ .

Setze  $x' = x + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x'' = x - \alpha \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $\alpha > 0$  klein genug, so dass  $x', x''$  immer noch zulässig sind. Dies kann folgendermassen konstruiert werden:

Definiere

$$\alpha_1 := \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ -\frac{x_i}{\mu_i} \mid \mu_i < 0 \right\},$$

$$\alpha_2 := \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{x_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0 \right\}.$$

Wähle  $\alpha \in (0, \min \{\alpha_1, \alpha_2\})$

Weil  $\mu \neq 0$  ist, können die beiden Mengen  $\left\{ -\frac{x_i}{\mu_i} \mid \mu_i < 0 \right\}$  und  $\left\{ \frac{x_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0 \right\}$  nicht beide leer sein.  $\alpha$  ist entsprechend wohldefiniert.

Weil  $\mu \neq 0$  und  $\alpha > 0$  sind, ist  $x' \neq x''$ .

$x', x''$  sind in  $P$ , weil

$$Ax' = Ax + \alpha \underbrace{A \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} = Ax = b$$

$$Ax'' = Ax - \alpha \underbrace{A \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} = Ax = b$$

Nun gilt aber

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Extremalität von  $x$ . Die ersten  $k$  Spalten von  $A$  sind also tatsächlich linear unabhängig.

Weil  $r(A) = m$  ist, kann man  $(a_1, \dots, a_k)$  durch weitere  $(m - k)$  Vektoren  $a_{k+1}, \dots, a_m \in A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  zu einer Basis ergänzen.

Definiere  $B = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$  und zerlege  $A$  entsprechend:

$$A = [B|N]$$

Weil  $x \in P$  ist, gilt

$$Ax = [B|N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b.$$

Wegen der Regularität von  $B$  gilt

$$B^{-1}b = x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \geq 0.$$

Damit ist auch die andere Richtung gezeigt.

q.e.d.

Jede zulässige Basislösung entspricht also einem Extrempunkt des Polyeders, und umgekehrt lässt sich jedem Extrempunkt des Polyeders eine Basislösung zuordnen. Diese Zuordnung ist eindeutig, falls die Basislösung nichtdegeneriert ist.

**Definition:** (Degeneriertheit)

Eine (zulässige) Basis  $B$  heisst degeneriert, falls es ein  $i$  gibt mit  $(B^{-1}b)_i = 0$ , und nichtdegeneriert, falls  $B^{-1}b > 0$ .

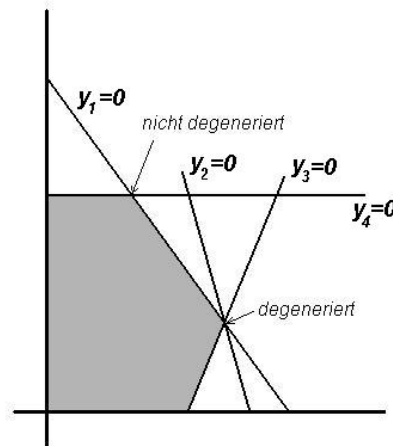


Abbildung 2: Degenerierte Basislösung

**Definition:** (Extremalrichtung)

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Dann heisst  $d \in \mathbb{R}^n$  Richtung in  $X$ , falls  $x + \lambda d \in X$ , für alle  $\lambda \geq 0$  und  $x \in X$ .

Eine Richtung  $d$  heisst Extremalrichtung, falls für Richtungen  $d_1, d_2$  gilt, dass aus  $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  folgt, dass  $d_1 = \alpha d_2$ , für ein  $\alpha > 0$ .

## 1.4 Dualität

Primale Aufgabe ( $LP$ ):

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Duale Aufgabe ( $LD$ ):

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{unter} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

In unserem Einführungsbeispiel ist die duale Aufgabe

$$\begin{array}{ll} \min & 15y_1 + 500y_2 + 20y_3 \\ \text{unter} & y_1 + 50y_2 \geq 10 \\ & 0.6y_1 + 10y_2 + y_3 \geq 7.5 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

**Lemma:** (Schwache Dualität)

Sei  $x$  eine zulässige Lösung von ( $LP$ ),  $y$  eine zulässige Lösung von ( $LD$ ). Dann gilt

$$c^T x \leq b^T y.$$

**Beweis:**

$$c^T x \leq (y^T A)x = y^T Ax \leq y^T b = b^T y \quad \text{q.e.d.}$$

**Korollar:** (Zertifikat)

Seien  $x^*$ ,  $y^*$  zulässig für ( $LP$ ) resp. ( $LD$ ) und es gelte  $b^T y^* = c^T x^*$ . Dann sind  $x^*$ ,  $y^*$  optimal für ( $LP$ ) resp. ( $LD$ ).

**Satz:** (Dualitätssatz der linearen Programmierung)

Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min \{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\},$$

sofern beide Aufgaben zulässige Lösungen besitzen.

**Beweis:**

Wir verwenden das Lemma von Farkas, das wir hier ohne Beweis aufführen.

**Lemma:** (Farkas)

Gegeben seien eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

1.  $\exists x \geq 0$  mit  $Ax \leq b$ .
2.  $\exists y \geq 0$  mit  $y^T A \geq 0$  und  $y^T b < 0$ .

Um den Satz zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass es ein  $x \geq 0$  und ein  $y \geq 0$  gibt mit

- $Ax \leq b$ ,
- $A^T y \geq c$ ,
- $c^T x \geq b^T y$ . (Mit der schwachen Dualität folgt nämlich  $c^T x = b^T y$ .)

Das heisst, wir müssen zeigen, dass es ein  $z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$  gibt mit

$$\hat{A}z := \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^T & b^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} =: \hat{b}.$$

Gemäss Farkas-Lemma hat genau eines der folgenden zwei Systeme eine Lösung:

1.  $\exists z \geq 0$  mit  $\hat{A}z \leq \hat{b}$ .
2.  $\exists s \geq 0$  mit  $s^T \hat{A} \geq 0$  und  $s^T \hat{b} < 0$ .

Zu zeigen: Das zweite System hat keine Lösung.

Das heisst, wir zeigen, dass für alle  $(u, v, w) \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{aligned} u^T A - v c^T &\geq 0, \text{ und} \\ v b^T - w^T A^T &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt, dass  $u^T b - w^T c \geq 0$ .

Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung.

**1. Fall:**  $v > 0$

$$\begin{aligned} u^T b &= \frac{1}{v} v u^T b \\ &= \frac{1}{v} u^T \underbrace{v b}_{\geq A w} \\ &\geq \frac{1}{v} \underbrace{u^T A}_{\geq v c^T} w \\ &= \frac{1}{v} v c^T w = c^T w \\ &= w^T c. \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $v = 0$

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} u^T A &\geq 0, \\ -w^T A^T &\geq 0. \end{aligned}$$

Weil  $(LP)$  und  $(LD)$  zulässig sind, gibt es ein  $x^* \geq 0$  und ein  $y^* \geq 0$  mit  $Ax^* \leq b$  und  $A^T y^* \geq c$ .

Folglich gilt

$$\begin{aligned} u^T b &\geq \underbrace{u^T A}_{\geq 0} x^* \\ &\geq 0 \\ &\geq (w^T A^T) y^* \\ &= w^T \underbrace{A^T y^*}_{\geq c} \\ &= w^T c. \end{aligned}$$

q.e.d.

**Satz:** (Komplementaritätssatz)

Sei  $x^*$  eine zulässige Lösung von  $(LP)$  und  $y^*$  eine zulässige Lösung von  $(LD)$ .  $(x^*, y^*)$  sind genau dann Optimallösungen der entsprechenden Probleme, falls

1.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \text{ oder } x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

2.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = c_i \text{ oder } y_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

**Beweis:**

Seien  $x^*, y^*$  primal bzw. dual zulässig. Dann gelten

1.

$$c_j x_j^* \leq \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^*, \quad j = 1, \dots, n$$

2.

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq b_i y_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Summieren wir die erste Ungleichung über  $j = 1, \dots, n$  und die zweite Ungleichung über  $i = 1, \dots, m$ , so erhalten wir

1.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^*,$$

2.

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Damit Gleichheit gilt, müssen beide Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt sein. Dies ist nur der Fall, wenn für alle  $i$  und für alle  $j$  gilt

1.

$$x_j^* = 0 \quad \text{und/oder} \quad c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*,$$

2.

$$y_i^* = 0 \quad \text{und/oder} \quad b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*.$$

q.e.d.

Zulässigkeit und Komplementarität lassen sich auch folgendermassen zusammenfassen.

**Satz:** (Kuhn-Tucker)

$(x^*, y^*)$  sind genau dann ein Paar von Optimallösungen zu  $(LP)$  und  $(LD)$ , wenn sie die nachfolgenden Gleichungen erfüllen.

1.  $Ax^* \leq b, x^* \geq 0,$

2.  $A^T y^* \geq c, y^* \geq 0,$

3.  $(x^*)^T (A^T y^* - c) = 0,$   
 $(y^*)^T (-Ax^* + b) = 0.$

## 2 Der Simplex Algorithmus II

### 2.1 Aufgabenstellung

Die Aufgabe der linearen Programmierung besteht aus der Maximierung einer linearen Funktion über einem Polyeder:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Dies ist wie bereits gehört die sogenannte **kanonische Form**. Wir schreiben dieses System mittels Schlupfvariablen in die **Standardform** um.

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Die Menge der zulässigen Lösungen dieses Gleichungssystems ist gegeben durch

$$P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}, \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad r(A) = m, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

Wir suchen innerhalb des Polyeders  $P$  eine optimale Lösung  $x$ . Eine Lösung  $x$  heisst optimal, wenn keine weitere Lösung  $\hat{x}$  existiert, sodass der Wert der Zielfunktion  $c^T \hat{x}$  grösser ist als  $c^T x$ . Wie bereits graphisch gesehen, liegt eine solche optimale Lösung auf einem Eckpunkt bzw. im entarteten Fall auf einer Seite des Polyeders  $P$ .

### 2.2 Herleitung des Simplex-Algorithmus

Wir erinnern uns vorerst daran, dass für einen Extrempunkt  $\bar{x}$  des Polyeders  $P$  (in Standardform) eine Zerlegung von  $A = [B|N]$ , mit  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulär, existiert. Daraus folgt die Zerlegung von  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

**Definition:** (zulässige Basis)

Jede zu einem Extrempunkt von  $P$  zugeordnete Basis  $B$  heisst zulässige Basis.

Eine solche Zuordnung zwischen Extrempunkten und zulässigen Basen muss nicht injektiv sein. Ist jedoch  $\bar{x}_B = B^{-1}b > 0$ , dann gehört zu diesem Extrempunkt genau die Basis  $B$ . Dies nennt man einen **nichtdegenerierten Extrempunkt** bzw. eine **nichtdegenerierte Basislösung**.

Das Polyeder  $P$  lässt sich somit mittels der Nichtbasisvariablen  $x_N$  darstellen:

$$\begin{aligned}
P &= \{x \mid Bx_B + Nx_N = b, x_B \geq 0, x_N \geq 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \mid x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \mid x_B = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \right\}
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion sieht in dieser Zerlegung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
&= c_B^T (\bar{x}_B - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\
&= c^T \bar{x} - (c^T B^{-1}N - c_N^T) x_N \\
&= c^T \bar{x} - z^T x_N
\end{aligned}$$

wobei wir  $z$  folgendermassen definieren.

**Definition:** (reduzierte Kosten)

Zu einer gegebenen (zulässigen) Basis  $B$  definiert man die reduzierten Kosten durch

$$z^T := c_B^T B^{-1}N - c_N^T$$

Aus  $x_N \geq 0$  folgt unmittelbar:

$$z \geq 0 \implies c^T x \leq c^T \bar{x} \quad \forall x \in P$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass unsere Extremallösung  $\bar{x}$  genau dann optimal ist, wenn die reduzierten Kosten  $z$  grösser oder gleich Null sind.

Falls die aktuelle Basis jedoch nicht optimal ist, dann gilt:

$$\exists j \in N \text{ mit } z_j = c_B^T B^{-1}a_j - c_j < 0.$$

Man kann die Zielfunktion also eventuell noch in Richtung von  $x_j$  vergrössern. Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir die 1-dimensionale Lösungsmenge zu  $Ax = b$ , gegeben durch

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda d_j, \quad \lambda \geq 0, \quad \text{mit} \quad d_j = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$$

Ein solches  $x(\lambda)$  erfüllt das Gleichungssystem  $Ax = b$  und zudem gilt für  $\lambda > 0$ :

$$c^T x(\lambda) = c^T \bar{x} + \lambda(c^T d_j) = c^T \bar{x} - \lambda \underbrace{(c_B^T B^{-1}a_j - c_j)}_{=z_j < 0} > c^T \bar{x}$$

Somit ist  $d_j$  ausgehend von  $\bar{x}$  eine *Anstiegsrichtung*, d.h. die Zielfunktion nimmt linear in  $\lambda$  um den Betrag  $z_j$  zu.

Wir müssen die Schrittweite  $\lambda^*$  so bestimmen, dass der Zielfunktionswert in diese Richtung maximiert wird, jedoch die Zulässigkeit nicht verletzt wird.

Um die Nichtnegativität von  $x(\lambda)$  zu untersuchen, betrachten wir  $y_j := B^{-1}a_j$  und unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

- $y_j \leq 0$

Dann gilt aber

1.  $\bar{x} + \lambda d_j \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$
2.  $c^T d_j > 0$

Daraus folgt, dass  $d_j$  eine Anstiegsrichtung in  $P$  ist, entlang welcher die Zielfunktion unbeschränkt wachsen kann.

*In diesem Fall ist die Unbeschränktheit des Optimalwerts angezeigt und der Algorithmus bricht ab.*

- $y_j \not\leq 0$

Dann existiert ein Index  $i$  mit  $(y_j)_i =: y_{ij} > 0$ . Gemäss der Definition von  $y_j$  ergibt die Zerlegung von  $x(\lambda)$ :

$$x(\lambda)_B = \bar{x}_B - \lambda y_j, \quad x(\lambda)_j = \lambda, \quad x(\lambda)_k = 0 \text{ für } k \in N, k \neq j$$

Damit  $x(\lambda) \geq 0$  gilt, bestimmt man die Schrittweite  $\lambda^*$  anhand folgender *Quotientenregel*:

$$\lambda \leq \min_i \left\{ \frac{(\bar{x}_B)_i}{y_{ij}} \mid y_{ij} > 0 \right\} =: \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} := \lambda^* \quad (1)$$

wobei  $\bar{b} := B^{-1}b = \bar{x}_B$  bezeichnet.

Mit einer solchen Definition der Schrittweite  $\lambda^*$  wird gesichert, dass für  $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$  weiterhin  $\bar{x} + \lambda d_j \geq 0$  gilt und zudem  $(x(\lambda^*)_B)_r = 0$  gilt.

Die neue Lösung  $\bar{x} + \lambda^* d_j$  besitzt mindestens  $(n-m)$  Nullkomponenten, nämlich  $(x(\lambda^*)_N)_i = 0$  für  $i \in N, i \neq j$  und  $(x(\lambda^*)_B)_r = 0$ . Die neue Basis

$$\bar{B} := (B - \{a_r\}) \cup a_j \quad (2)$$

besitzt die zulässige Basislösung  $x(\lambda^*) = \bar{x} + \lambda^* d_j$  und somit ist  $x(\lambda^*) \in P$  ein Extrempunkt.

Man nennt  $(x_N)_j$  die *basiseintretende Variable* und  $(x_B)_r$  *basisverlassende Variable*.

Das Anpassen der Basis gemäss (2) nennt man *Basisaustauschschritt* und wird algorithmisch mit einem Pivotschritt nachvollzogen.

## 2.3 Der Simplex Algorithmus - geometrisch

### 1. Initialisierung

Bestimme einen Extrempunkt  $\bar{x}$  mit zugehöriger Basis  $B$ :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 2. Berechne die reduzierten Kosten $z^T := c_B^T B^{-1}N - c_N^T$ .

Falls  $z \geq 0$  ist, so ist  $\bar{x}$  eine Optimallösung.

Ansonsten bestimme  $j \in N$  mit  $z_j < 0$ . Falls dann  $y_j := B^{-1}a_j \leq 0$ , so haben wir einen Strahl mit unbeschränkten Optimallösungen. Ist dies nicht der Fall, so gehe zu Schritt 3.

### 3. Bestimme anhand der Quotientenregel (1) $\lambda^*$ , $r \in B$ mit

$$\lambda^* := \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{(y_j)_i} \mid (y_j)_i > 0 \right\} =: \frac{\bar{b}_r}{(y_i)_r}$$

### 4. Basisaustauschschritt

$(x_B)_r$  verlässt die Basis,  $(x_N)_j$  kommt in die Basis. Also:

$$\begin{aligned} \bar{B} &:= (B - \{a_r\}) \cup \{a_j\} \\ \bar{N} &:= (N - \{a_j\}) \cup \{a_r\} \end{aligned}$$

Diese geometrisch motivierten Schritte lassen sich sehr kompakt in einer Tableauform darstellen, was das Berechnen der optimalen Lösung und deren Zielfunktionswert erheblich erleichtert.

## 2.4 Tableauform

Wiederum betrachten wir die Standard-Aufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{unter} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

wobei eine Zerlegung  $A = [B|N]$  mit  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  als zulässige Basis vorliegt. Wir führen eine zusätzliche Variable  $f$  mit der Bestimmungsgleichung

$$f - c^T x = 0$$

ein, wodurch  $f$  genau dem Zielfunktionswert im Punkt  $x$  entspricht. Mit der Zerlegung von  $x$  in die beiden Teile  $x_B$  und  $x_N$  lassen sich die beiden Gleichungen

$$f - c_B^T x_B - c_N^T x_N = 0 \tag{3}$$

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{4}$$

in Tabellenform umschreiben:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & f & x_B & x_N & 1 \\ \hline \text{ZF:} & 1 & -c_B^T & -c_N^T & 0 \\ \hline \text{NB:} & 0 & B & N & b \end{array}$$

Wir lösen die Gleichung (4) nach den Basisvariablen  $x_B$  auf, sodass man

$$x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

erhält. Dies setzt man wiederum in der Gleichung (3) ein, wodurch man das sogenannte **(Ausgangs)Tableau** erhält.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & f & x_B & x_N & 1 \\ \hline \text{ZF:} & 1 & 0 & c_B^T B^{-1}N - c_N^T & c_B^T B^{-1}b \\ \hline \text{NB:} & 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

Ein solches Tableau heisst **zulässig**, falls die rechte Seite  $B^{-1}b \geq 0$  ist.

Da bei geeigneter Nummerierung der Basisvariablen auf die Einheitsmatrix verzichtet werden kann, lassen sich dieselben Informationen im **reduzierten Tableau** festhalten:

$$\begin{array}{c|cc|c} & & x_N & 1 \\ \hline f & c_B^T B^{-1}N - c_N^T & c_B^T B^{-1}b \\ \hline x_B & B^{-1}N & \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}} \end{array}$$

Um nun einzelne Schritte des Simplex-Algorithmus zu zeigen, nehmen wir an, es liege ein reduziertes Tableau vor, welches wir , unter Einbezug der Zielfunktion als nullte Zeile, wie folgt anschreiben wollen:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & (x_N)_1 & \dots & (x_N)_n & 1 \\ \hline f & y_{01} & \dots & y_{0n} & \bar{b}_0 \\ \hline (x_B)_1 & y_{11} & \dots & y_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_B)_m & y_{m1} & \dots & y_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

Dabei bezeichnen:

$$\begin{aligned} x_N &= ((x_N)_1, \dots, (x_N)_n) && \text{aktueller Nicht-Basisvektor} \\ x_B &= ((x_B)_1, \dots, (x_B)_m) && \text{aktueller Basisvektor} \\ y_0 &= (y_{01}, \dots, y_{0m}) && \text{aktueller Zielfunktionskoeffizient (reduzierte Kosten)} \\ \bar{b}_0 &= c_B^T B^{-1}b && \text{aktueller Zielfunktionswert der Basislösung} \end{aligned}$$

Zudem gilt, da wir von einem zulässigen Tableau ausgehen, dass

$$\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Das schematische Vorgehen in der Tableaudarstellung ist wie folgt:

**1. Prüfen der Zielfunktionszeile auf Optimalität, ggf. Wahl der Pivotspalte  $j$**

- (a) Ist  $y_{0j} \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ , so ist das Maximum von  $z$  bereits erreicht, wobei die aktuellte Basislösung / Zielfunktionswert

$$x_B = \bar{b}, x_N = 0, z_{\max} = \bar{b}_0$$

eine optimale Lösung / Optimalwert darstellen.

*Das Verfahren bricht mit der aktuellen Basislösung als Optimallösung ab!*

- (b) Andernfalls wähle  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $y_{0j} < 0$ .  
(Die Wahl ist nicht eindeutig: Unterschiedliche Kriterien werden in der Praxis verwendet!)

**2. Prüfen des  $j$ -ten Spaltenvektors**

- (a) Ist  $y_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$ , so existiert keine endliche Maximallösung:

Vergrößert man die zugehörige Nichtbasisvariable  $x_j$ , so wächst die Zielfunktion ohne dass die Nichtnegativität verletzt wird. Dies entspricht der Existenz einer Extremalrichtung entlang welcher die Zielfunktion zunimmt.

*Das Verfahren bricht mit einer unbeschränkten Optimallösung mit Angabe der unbeschränkten Extremalrichtung ab!*

- (b) Andernfalls führt man (ausserhalb der Zielfunktionszeile) einen Austauschschritt durch, wobei das **Pivot-Element**  $y_{ij}$  nach dem Quotientenkriterium bestimmt wird:

$$\frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} = \min_{l>0} \left\{ \frac{\bar{b}_l}{y_{lj}} \mid y_{lj} > 0 \right\}$$

**3. Nachführen des Tableaus aufgrund des Austauschschrittes**

Ein Austauschschritt mit dem Pivotelement  $y_{ij} > 0$  im reduzierten Tableau:

- (a) führt zu einer Modifikation des Randes, indem die basisverlassende Variable ihren Platz mit der basiseintretenden Variable tauscht.  
(b) Die neuen Tableauelemente werden durch die folgenden Pivotregeln bestimmt:

$$\begin{aligned} y_{ij}^* &= \frac{1}{y_{ij}} && \text{(Pivotelement)} \\ y_{lj}^* &= -\frac{y_{lj}}{y_{ij}} && l \in \{0, \dots, m\} - \{i\} \text{ (Pivotspalte)} \\ y_{ik}^* &= \frac{y_{ik}}{y_{ij}} && k \in \{1, \dots, n\} - \{j\} \text{ (Pivotzeile)} \\ y_{lk}^* &= y_{lk} - \frac{y_{lj}y_{ik}}{y_{ij}} && l \in \{0, \dots, m\} - \{i\} \\ &&& k \in \{1, \dots, n\} - \{j\} \\ b_i^* &= \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} && \text{(Pivotzeile)} \\ b_k^* &= \bar{b}_k - \frac{y_{kj}\bar{b}_i}{y_{ij}} && k \in \{0, \dots, n\} - \{i\} \end{aligned}$$

Wiederhole die Schritte 1 bis 3!

Offensichtlich besteht in der Wahl der Pivotspalte und ggf. auch in der Pivotzeilenwahl ein Spielraum, der in jeder Implementation festgelegt werden muss. Jede Wahl führt auf einem „anderen“ Weg zum Optimalpunkt.

## 2.5 Beispiel

Wir betrachten das Einführungsbeispiel in Standardform.

$$\begin{array}{llll} \max & 10x_1 + 7.5x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 + 0.6x_2 + y_1 & = & 15 \quad (\text{Altpapier}) \\ & 50x_1 + 10x_2 + y_2 & = & 500 \quad (\text{Vorstoffe}) \\ & x_2 + y_3 & = & 20 \quad (\text{Grobpapier}) \end{array}$$

Da die rechte Seite nichtnegativ ist, liegt ein zulässiges Ausgangstableau vor:

	$x_1$	$x_2$	1
$f$	-10	-7.5	0
$y_1$	1	0.6	16
$y_2$	50	10	500
$y_3$	0	1	20

Beide Zielfunktionskoeffizienten sind negativ, d.h. wir können die Pivotspalte selbst wählen. Wenn wir  $x_2$  somit in die Basis hineinnehmen wollen, wählen wir unser Pivotelement mittels Quotientenregel in der zweiten Spalte. Die drei Quotienten sind

$$\frac{15}{0.6} = 25, \quad \frac{500}{10} = 50, \quad \frac{20}{1} = 20$$

Daher tauschen  $x_2$  und  $y_3$  die Plätze. Das neue Tableau hat dann die Gestalt:

	$x_1$	$y_3$	1
$f$	-10	7.5	150
$y_1$	1	-0.6	3
$y_2$	50	-10	300
$x_2$	0	1	20

Nun ist der einzige negative Zielfunktionskoeffizient bei  $x_1$ . Wegen der Quotientenregel tauscht  $x_1$  den Platz mit  $y_1$ , was zu folgendem Tableau führt.

	$y_1$	$y_3$	1
$f$	10	1.5	180
$x_1$	1	-0.6	3
$y_2$	-50	20	150
$x_2$	0	1	20

Da keine negativen Zielfunktionskoeffizienten mehr übrig sind, haben wir die Optimallösung mit dem Wert  $f^* = 180$  an der Stelle

$$x_1^* = 3; \quad x_2^* = 20$$

gefunden.

## 2.6 Konvergenz

Es stellt sich natürlich auch die Frage, ob das Verfahren überhaupt konvergiert und falls ja, wie gross der Rechenaufwand in Abhängigkeit der Modellgrössen  $n$  und  $m$  ist.

**Lemma:** Sind alle erzeugten Basislösungen nichtdegeneriert, so bricht das Simplex-Verfahren (für jede zulässige Pivotwahl) nach endlich vielen Iterationen ab.

**Beweis:** Gemäss der Definition für Degeneriertheit gilt in jeder zulässigen Basislösung für die rechte Seite

$$\bar{b} = B^{-1}b > 0$$

Sei also  $B$  eine zulässige Basis eines Tableaus mit einem Zielfunktionskoeffizienten in der  $j$ -ten Spalte  $z_j < 0$  und wähle diese Spalte als Pivotspalte: Die Quotientenregel ergibt dann  $\lambda^* > 0$  in dieser Iteration, und der Zielfunktionswert nimmt um den Wert

$$-z_j \cdot \lambda^* > 0$$

zu. Also entspricht die neue Basislösung einem andern Extrempunkt von  $P$  mit besserem Zielfunktionswert. Da die neue Basislösung nach Voraussetzung wiederum nichtdegeneriert ist, kann das Argument wiederholt werden. Also sind alle erzeugten Extrempunkte verschieden. Da die Anzahl der Extrempunkte endlich ist, muss das Verfahren abbrechen.

q.e.d

In der Praxis tritt jedoch häufig ein gravierendes Problem auf: Es kann zu sogenannten *Zyklen* kommen. Dies bedeutet, dass der Simplex-Algorithmus immer wieder dieselbe Ecke betrachtet und somit nicht terminiert. Ein Beispiel hierzu liefert die folgende Problemstellung.

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{3}{4}x_1 - 159x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \\ \text{unter} & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Dargestellt im reduzierten Tableau erhalten wir

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	1
$f$	$-3/4$	150	$-1/50$	6	0
$y_1$	<b><math>1/4</math></b>	-60	$-1/25$	9	0
$y_2$	$1/2$	-90	$-1/50$	3	0
$y_3$	0	0	1	0	1

Wir nehmen als Kriterium für die Wahl des Pivotelements die sogenannte „Greedy-Regel“: Bei mehreren Möglichkeiten einer basiseintretenden Variable nehmen wir diejenige mit dem kleinsten Koeffizienten. Bei mehreren Möglichkeiten der basisverlassenden Variable wird diejenige mit dem kleinsten Index gewählt.

Wir tauschen also  $x_1$  mit  $y_1$ :

	$y_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	1
$f$	3	-30	-7/50	33	0
$x_1$	4	-240	-4/25	36	0
$y_2$	-2	<b>30</b>	3/50	-15	0
$y_3$	0	0	1	0	1

Als zweiten Schritt verlässt  $y_2$  zugunsten von  $x_2$  die Basis:

	$y_1$	$y_2$	$x_3$	$x_4$	1
$f$	1	1	-2/25	18	0
$x_1$	-12	8	<b>8/25</b>	-84	0
$x_2$	-1/15	1/30	1/500	-1/2	0
$y_3$	0	0	1	0	1

Als nächstes werden  $x_3$  und  $x_1$  vertauscht:

	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_4$	1
$f$	-2	3	1/4	-3	0
$x_3$	-75/2	25	25/8	-525/2	0
$x_2$	1/120	-1/60	-1/160	<b>1/40</b>	0
$y_3$	75/2	-25	-25/8	525/2	1

Anschliessend vertauschen wir gemäss unserer Vorschrift die Variablen  $x_2$  und  $x_4$ :

	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$	1
$f$	-1	1	-1/2	120	0
$x_3$	<b>50</b>	-150	-125/2	10'500	0
$x_4$	1/3	-2/3	-1/4	40	0
$y_3$	-50	150	125/2	-10'500	1

Der kleinste Zielfunktionskoeffizient hat die Variable  $y_1$ . Also wird sie mit  $x_3$  vertauscht:

	$x_3$	$y_2$	$x_1$	$x_2$	1
$f$	1/50	-2	-7/4	330	0
$y_1$	1/50	-3	-125/2	10'500	0
$x_4$	-1/150	<b>1/3</b>	1/6	-30	0
$y_3$	1	0	0	0	1

Nun würde man wiederum die Variable  $y_2$  mit  $x_4$  tauschen, wodurch wir wieder im Anfangstableau gelandet sind. Wir drehen uns somit im Kreis. Einen Ausweg aus dieser Endlosschleife liefert die sogenannte **Bland-Regel**.

Dabei wählt man als basiseintretende Variable nicht diejenige mit dem kleinsten Zielfunktionskoeffizienten, sondern diejenige mit negativem Zielfunktionskoeffizienten und kleinstmöglichem Index. Anschliessend wird die basisverlassende Variable mit der Quotientenregel und dem kleinstmöglichem Index bestimmt.

Im obigen Beispiel würde man somit im fünften Austauschschritt nicht  $y_1$  mit  $x_3$  vertauschen, sondern stattdessen  $x_1$  in die Basis hinein nehmen.

## 2.7 Laufzeit

Die Zahl der Ecken eines Polyeders kann exponentiell in der Anzahl der Variablen und Ungleichung sein. Beispielsweise lässt sich der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel durch  $2n$  lineare Ungleichungen beschreiben, besitzt aber  $2^n$  Ecken. Klee und Minty konstruierten im Jahre 1972 einen verzerrten Einheitswürfel, den sogenannten *Klee-Minty-Würfel*, bei dem die von Dantzig vorgestellte Variante des Simplex-Verfahrens tatsächlich alle diese Ecken besuchte. (Vergleiche hierzu Harvey J. Greenberg: *Klee-Minty Polytope Shows Exponential Time Complexity of Simplex Method*. University of Colorado at Denver, 1997)

Andere Varianten des Simplex-Algorithmus, die einer bestimmten Spalten- bzw. Zeilenauswahlregel folgen, können beim Klee-Minty-Würfel zwar eine bessere Laufzeit erzielen, jedoch gibt es auch dort andere konkrete Beispiele, sodass die Laufzeit im schlechtesten Fall exponentiell wird.

Aus theoretischer Sicht ist das Simplex-Verfahren daher anderen Verfahren, wie z.B. dem *Innere-Punkte-Verfahren*, das polynomiale Laufzeit aufweist, unterlegen. Jedoch hat sich in der Praxis der Simplex-Algorithmus als effizienter erwiesen. Der Vorteil des Simplex liegt nämlich in der Stabilität: Bei kleinen Änderungen der Eingabedaten müssen beim Simplex nur einige Teilschritte korrigiert werden und erlauben daher einen schnellen Start. Bei den Inneren Punkten müssen alle Rechenschritte nochmals mit den neuen Daten durchlaufen werden.

In der Praxis hängt die Laufzeit des Simplex-Algorithmus oft im wesentlichen linear von der Anzahl der Zeilen ab. Tatsächlich wurde in den 80er Jahren gezeigt, dass solche Fälle wie der Klee-Minty-Würfel äusserst selten sind und einige Varianten des Simplex-Verfahrens unter bestimmten Annahmen an den Input im Mittel nur polynomiale Laufzeit benötigen. Es ist jedoch bis heute noch unklar, ob es eine Variante mit polynomialer Laufzeit für alle Instanzen gibt.