Die L^1 und L^2-Theorie der Fourier-Analysis

Benaja Schellenberg und Jing, Bo

29. November 2007

1 Die Fouriertransformation

Geschichte 1.1. Die Fourier Transformation (lat. die Umformung) ist nach dem berühmten französischen Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (geboren am 21. März 1768 in der Nähe von Auxerre, gestorben am 16. Mai 1830 in Paris) benannt. Doch worum handelt es sich bei der nach ihm benannten Transformation? Wir möchten mit dieser Arbeit einen kleinen Einblick in ein paar auserwählte Resultate der L^1- und L^2- Theorie geben. Die meisten dieser Resultate sind ohne Beweis angegeben, da das Papier im Rahmen des Seminars ´Harmonische Analysis´ im Herbstsemester 2007 an der ETH Zürich bei Prof. M. Struwe entstanden ist. Die ersten beiden Kapitel sollen dazu dienen, die Grundlagen bereitzustellen, auf welche im Kapitel 3 - wenn es darum geht den Satz von Plancherel (1885 - 1941) zu beweisen - verwiesen wird. Kapitel 4 schliesst die Arbeit mit einer Anwendung dieses wichtigen Satzes. Doch genug der einleitenden Worte und auf zur Frage, was die Fourier Transformation überhaupt ist.

Definition 1.1. Für f $\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ definiert als

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (f(t)e^{-2i\pi tx})dt \tag{1.1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definitionen sind schön und gut, Beispiele veranschaulichen eine Definition jedoch erst, wir wollen also einmal solch eine Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ berechnen:

Beispiel 1.1. Sei $f(t) = 1_{[-b,b]}(t)$ ein Signal der Stärke 1, welches bei -b auftritt und bei b wieder erlischt. Für die Fouriertransformierte $\hat{f}(x)$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\pi tx} 1_{[-b,b]})dt = \int_{-b}^{b} (e^{-2i\pi tx})dt \\
&= [\frac{-1}{(2ix\pi)} e^{-2i\pi tx}]_{-b}^{b} = -\frac{1}{(2ix\pi)} e^{-2ibx\pi} + \frac{1}{(2ix\pi)} e^{2ibx\pi} \\
&= \frac{1}{(x\pi)} sin(2\pi bx) = \frac{1}{(x\pi)} sin(bx)
\end{aligned}$$

Und für $t = 0$ gilt: $\hat{f} = 0$.

Es folgt nun sogleich der erste Satz, welchen wir hier aber nicht beweisen wollen.

Satz 1.1. *$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so folgt:*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \tag{1.2}$$

ausserdem ist $\hat{f}$ gleichmässig stetig und $f \rightarrow \hat{f}$ linear.

Unverzüglich drängt sich der nächste nicht ganz so triviale Satz auf.

Satz 1.2. *(G.F.B.Riemann (1826-1866) und H.L.Lebesgue (1875-1941))*
$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}(x) \overset{|x|\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0$ dann folgt:

$$\hat{f} \in C_0. \tag{1.3}$$

Der Beweis basiert auf einem Dichtheitsargument und gehört gewiss nicht zu den spannendsten Beweisen der Mathematik, weshalb wir ihn hier nicht beweisen möchten. Stattdessen halten wir noch ein paar interessante Eigenschaften der Fouriertransformation fest.

Bezeichnung 1.1.

$$(\tau_n f)(x) = f(x-h)$$

mit $h \in \mathbb{R}^n$

Es gelten nun folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

Korollar 1.3.

(i)

$$\widehat{\tau_n f(x)} = e^{-2\pi i h x}\hat{f}(x) \tag{1.4}$$

(ii)

$$\widehat{e^{2\pi i t h} f}(x) = (\tau_n \hat{f})(x) \tag{1.5}$$

Korollare werden nach Prof. Dr. M. A. Knus nicht bewiesen und so wollen wir diesen Mythos hier nicht brechen und definieren deshalb nun die Faltung:

Definition 1.2. Sei $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Faltung $h := f * g$ definiert durch

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y)g(y))dy \tag{1.6}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 1.1. Wir bemerken, dass die Faltung symmetrisch ist, dass also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y)g(y))dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f(y)g(x-y))dy. \tag{1.7}$$

Bemerkung 1.2. Die Funktion $f(x-y)g(y)$ ist eine messbare Funktion in den beiden Variablen x und y. Weiter ist die Faltung assoziativ ($(f*g)*h = f*(g*h)$), distributiv ($f*(g+h) = f*g + f*h$), assoziativ mit der skalaren Multiplikation ($a(f*g) = (af)*g = f*(ag)$ und $a \in \mathbb{R}$) und es gilt die Ableitungsregel ($D(f*g) = (Df)*g = f*(Dg)$).

Für diese Faltung gilt nun der nützliche Satz 1.4:

Satz 1.4. *$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dann gilt:*

$$\widehat{f*g} = \hat{h} = \hat{f}\hat{g}. \tag{1.8}$$

Wir erwähnen der Vollständigkeit halber noch:

Korollar 1.5. *Für $g \in L^1(\mathbb{R}^n), f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $h := f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt die Ungleichung*

$$\|f*g\|_p = \|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 . \tag{1.9}$$

2 Die Inverse der Fouriertransformation

Hat man einmal die Fouriertransformation definiert, so würde man sich nun eigentlich wünschen, dass sich aus $\hat{f}(t)$ nun $f(x)$ rekonstruieren lässt. Man ist nun natürlich unverzüglich versucht, wie folgt anzusetzen:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(t)e^{2\pi itx})dt \tag{2.1}$$

So ohne weiteres, können wir das aber nicht schreiben, woher sollen wir denn wissen, dass $\hat{f}(t)$ genügend schnell abfällt? Wie sollen wir nun diesem Problem begegnen? Es ist hier weder der Platz noch das Verlangen vorhanden, die folgenden Ausführungen im Detail zu besprechen, doch im wesentlichen geht es darum, dass wir f mit einer Funktion φ_ϵ falten - wobei $\varphi_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$ und $\varphi(x)$ die sogenannte Gaussfunktion ist - und die Funktion f somit glätten.

Definition 2.1.

$$\varphi(x) := \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} \tag{2.2}$$

$\varphi(x)$ heisst Gaussfunktion.

Lemma 2.1. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (e^{\frac{-|x|^2}{4}})dx = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \tag{2.3}$$

(ii)

$$\widehat{e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} \tag{2.4}$$

(iii) $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$e^{2\pi ity} \widehat{* e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2}}(x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\epsilon}}. \tag{2.5}$$

Definition 2.2.

$$W(t,\alpha) := (4\pi\alpha)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|t|^2}{4\alpha}} \tag{2.6}$$

Dann heisst $W(t,\alpha)$ Gauss-Weierstrass - Kern.

Für diesen Gauss-Weierstrass - Kern gilt:

Korollar 2.2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(x) e^{2\pi itx} e^{-4\pi^2\alpha|x|^2}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) W(x-t,\alpha)) dx \tag{2.7}$$

$\forall \alpha > 0$ *und weiter gilt auch:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (W(x,\alpha)) dx = 1 \tag{2.8}$$

$\forall \alpha > 0$.

Diese Resultate werden für den Beweis des Satzes von Plancherel gebraucht, weshalb wir sie hier angeben wollten. Bevor wir nun weiterfahren können, benötigen wir den Satz 2.3:

Satz 2.3. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *dann gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(x) g(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) \hat{g}(x)) dx. \tag{2.9}$$

Beweis.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(x) g(x)) dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} (f(t) e^{2i\pi tx}) dt) g(x)) dx$$

Mit dem Satz von G.Fubini (1879-1943) folgt nun

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} (f(t) e^{2i\pi tx}) dt g(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} (g(x) e^{2i\pi tx}) dx f(t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(t) \hat{g}(t)) dt \end{aligned}$$

$\square$

Definition 2.3.

$$M_\epsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) e^{-4(\pi)^2\epsilon|x|^2}) dx \tag{2.10}$$

heisst Gauss-Mittel zum Niveau ϵ von $f \in L^\infty$.

Es gilt nun das Lemma 2.

Lemma 2.4. *$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int(\varphi) = 1$, $\varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\epsilon^{-1}x)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ so gilt:*

$$\|f * \varphi_\epsilon - f\|_p \overset{\epsilon \longrightarrow 0}{\rightarrow} 0. \tag{2.11}$$

Damit erhalten wir:

Satz 2.5. *Die Gaussmittel von*

$$(\hat{f}(x)e^{2\pi itx})(x) \tag{2.12}$$

konvergieren in $L^1(R^n)$ gegen $f(t)$.

Dies bringt uns abschliessend zum folgenden Resultat:

Satz 2.6. *Sei f und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(t)e^{2\pi ixt})dt. \tag{2.13}$$

Mit diesen Resultaten im Rucksack können wir uns nun auf den Weg machen, den Satz von Plancherel zu formulieren und anschliessend zu beweisen. Doch alles der Reihe nach, noch sind wir nicht ganz so weit. Es fehlen noch ein paar abschliessende Schlussfolgerungen und Ergebnisse der L^1 - Theorie bevor wir uns Kapitel 3 widmen können.

Falls $\hat{f}(x) = 0$ fast überall ($\Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$), so folgt aus Satz 2.6 $f(t) = 0$ für fast alle t. Setzten wir $f = f_1 + f_2$, so ergibt sich die Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten:

Korollar 2.7. *Seien f_1, f_2 integrabel und $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $f_1(t) = f_2(t)$ fast überall.*

Wir untersuchen nun unter welchen Vorraussetzungen es einen Ausdruck gibt, in Zusammenhang mit der Fourier-Transformierten $\hat{f}$, welcher nur punktweise gegen die ursprüngliche Funktion f konvergiert.

Definition 2.4. Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heisst *Lebesgue-Punkt* von f, falls

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_{\leq k}(0)} |f(x-t) - f(x)|dt = 0.$$

Die Menge solcher Punkte wird als *Lebesgue-Menge* von f bezeichnet.

Es lässt sich relativ einfach zeigen, dass für ein $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Punkte von f sind.
Der folgende Satz beantwortet unsere Frage. Sein Beweis beruht auf einer Reihe von recht technischen Abschätzungen und wird hier nicht angeführt.

Satz 2.8. *Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, für $\epsilon > 0$, $\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$ und definiere $\psi(x) = \inf\{C \in [0,\infty]; \forall |t| \geq |x| : |\phi(t)| \leq C$ f.ü.$\} = \operatorname{ess\,sup}_{|t|\geq|x|} |\phi(t)|$. Falls nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt*

$$\lim_{\epsilon\to 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)dt$$

für jeden Lebesgue-Punkt x von f, also fast überall.

Nimmt man als ϕ_ϵ den Gauss-Weierstrass Kern, so ergibt sich $\lim_{\epsilon\to 0}(f * \phi_\epsilon)(x) = f(x)$ fast überall.
Die Lebesgue-Menge von f enthält insbesondere auch die Stetigkeitspunkte von f. Somit lässt sich der Satz auf solche Punkte anwenden und wir erhalten zunächst mit Korollar 2.2

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{-4\pi^2\epsilon|x|^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0}(f * \phi_\epsilon)(0) = f(0),$$

falls f stetig in 0 ist. Aus Fatou's Lemma folgt schliesslich

Korollar 2.9. *Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \geq 0$ und f stetig in 0, dann ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt fast überall*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi itx}dx.$$

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ hat ausserdem zur Folge, dass die obige rechte Seite gleich $\widehat{\delta_{-1}\hat{f}}$ ist, also nach Satz 1.1 eine gleichmässig stetige Funktion, wobei $\delta_a f := f(ax)$ für $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.1. Da $\phi_\epsilon(x) := (4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} \geq 0$ lässt sich das Korollar anwenden und man erhält die Identität

$$e^{4\pi^2\epsilon|t|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)e^{2\pi itx}dx.$$

3 L^2 Theorie und der Satz von Plancherel

Nun werden wir unsere Erkenntnisse der L^1 Theorie benutzen, um auf elegante Art und Weise, die Fortsetzung der Fourier-Transformation und Inversion als Operatoren auf dem Raum L^2 zu erhalten. Im folgenden wird gezeigt, dass unter Ausnutzung der Hilbertraum-Eigenschaft des L^2, sehr angenehme Eigenschaften der Fourier-Transformation zum Vorschein kommen, die ihre Handhabung, verglichen mit der Situation auf L^1, wesentlich vereinfacht.

Lemma 3.1. *$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (bezüglich der durch die L^2-Norm induzierte Metrik) und für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*

Beweis. $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt die erste Behauptung.
Sei $g(x) = \overline{f(-x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Satz 1.3 folgt $h = f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und nach Satz 1.4 $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$. Es gilt

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-t)}e^{-2\pi ixt}dt = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-t)e^{2\pi ixt}dt} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi ixt}dt} = \overline{\hat{f}},$$

also $\hat{h} = |\hat{f}|^2 \geq 0$. Als Faltung zweier L^2-Funktionen ist h gleichmässig stetig und wir erhalten $h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x)dx,\ \hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nach Korollar 2.9. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x)dx = h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} g(0-x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\end{aligned}$$

□

Eine Folgerung ist, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion aus $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Wir benutzen diese Tatsache um die Fourier Transformation auf ganz L^2 fortzusetzen:

Satz 3.2. *Es existiert eine beschränkte Fortsetzung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ der Fourier Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, welche eindeutig ist.*

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann existiert eine Cauchy-Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_{L^2} \to 0$ $(k \to \infty)$. Aus Lemma 3.1 folgt offenbar, dass $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in L^2 bildet. Somit besitzt sie einen Grenzwert, welchen wir bezeichnen als

$$\mathcal{F}f := \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}f_k.$$

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $\|g_k - f\|_{L^2} = \lim_{l\to\infty} \|g_k - f_l\|_{L^2} \to 0$ $(k \to \infty)$, dann $\|g_k - f_l\|_{L^2} = \|\hat{g}_k - \hat{f}_l\|_{L^2} \to 0$ $(k, l \to \infty)$ und die Grenzwerte sind gleich. $\mathcal{F}$ ist also wohldefiniert.
Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der ersten Aussage von Lemma 3.1. □

Setzt man $f_k := \chi_{B_{\leq k}(0)} f$, so erhält man offenbar eine Cauchy-Folge, die gegen f konvergiert. Dadurch können wir die Erweiterung auch wie folgt charakterisieren:

$$\mathcal{F}f(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x) = \int_{B_{\leq k}(0)} f(t)e^{-2\pi ixt}dt. \tag{3.1}$$

Definition 3.1. Ein beschränkter linearer Operator $\mathcal{U} : H \to H$ auf dem Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ heisst *unitärer Operator*, falls er surjektiv ist und

$$\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Beachte, dass $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum ist, mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}dx.$$

Da die L^2-Norm durch das Skalarprodukt induziert wird, gilt die Polarisationsidentität:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2_{L^2} - \|f-g\|^2_{L^2} + i\|f+ig\|^2_{L^2} - i\|f-ig\|^2_{L^2}) \tag{3.2}$$

Nun formulieren wir das Hauptresultat dieses Abschnitts, den *Satz von Plancherel*:

Satz 3.3. *(i) $\mathcal{F}$ ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$*

(ii) Die inverse Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}h := \delta_{-1}\mathcal{F}h$$

für alle $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Beweis. Aus Lemma 3.1 und der Stetigkeit der Norm lässt sich unmittelbar zeigen, dass $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie ist. Denn es gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ in L^2.

(i) $\mathcal{F}$ ist surjektiv: Eine Cauchy-Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Grenzwert $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist das Bild einer Cauchy-Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wegen der Isometrie-Eigenschaft. Letztere habe den Grenzwert f, dann gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k - \mathcal{F}f\| = \|g - \mathcal{F}f\| \Rightarrow g \in \mathcal{F}L^2(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum von L^2. Angenommen es existiert ein $h \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$, dann gibt es ein $l \in L^2(\mathbb{R}^n)^*$ mit

$$l(\mathcal{F}f) = 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad l(h) \neq 0$$

[1, Satz 4.2.4]. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz [1, Satz 4.3.2] existiert ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $l = \langle \cdot\,, g\rangle_{L^2}$, wobei

$$\langle h, g\rangle \neq 0 \Rightarrow \|g\|_{L^2} \neq 0. \tag{3.3}$$

Es gilt also

$$0 = \langle \mathcal{F}f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\overline{g}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{F}\overline{g}dx^1$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Daraus ergibt sich

$$0 = \|\mathcal{F}\overline{g}\|_{L^2} = \|g\|_{L^2},$$

und dies ist der gewünschte Widerspruch zu (3.3).

Die Invarianz des Skalarprodukts unter $\mathcal{F}$ lässt sich nun leicht durch (3.2) einsehen. $\mathcal{F}$ ist also unitär.

(ii) Für $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ untersuchen wir $\delta_{-1}\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \lim_{k\to\infty} f_k$, wobei wir die Folge analog zu (3.1) durch

$$f_k(x) = \int_{B_{\leq k}(0)} \mathcal{F}f(t)e^{2\pi i t x}dt$$

[1] Die letzte Identität gilt nach Satz 2.3 für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, aber man benötigt nichts weiteres als die Stetigkeit des Skalarprodukts um mittels eines Folgenarguments einzusehen, dass die Gültigkeit der Aussage auch für L^2-Funktionen gegeben ist. Die Stetigkeit folgt aber sofort aus (3.2), da die Norm stetig ist.

definieren. Dabei wurde wieder die L^2-Konvergenz der $L^1 \cap L^2$-Funktionen $\mathcal{F}f\chi_{B_{\leq k}(0)}$ ausgenutzt. Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle g, \delta_{-1}\mathcal{F}(\mathcal{F}f)\rangle &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\overline{f_k(x)}dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\overline{\int_{B_{\leq k}(0)} \mathcal{F}f(t)e^{2\pi itx}dt}\right)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{B_{\leq k}(0)} \overline{\mathcal{F}f(t)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi itx}dx\right)dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{B_{\leq k}(0)} \overline{\mathcal{F}f(t)}\mathcal{F}g(t)dt = \langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}f\rangle = \langle g, f\rangle.
\end{aligned}$$

Durch einen weiteren Grenzübergang, lässt sich das Resultat $\langle g, \delta_{-1}\mathcal{F}(\mathcal{F}f)\rangle = \langle g, f\rangle$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ verallgemeinern. Daraus folgt unmittelbar

$$f = \delta_{-1}\mathcal{F}(\mathcal{F}f),$$

unsere Definition der Inversen $\mathcal{F}^{-1}h := \delta_{-1}\mathcal{F}h,\ (h = \mathcal{F}f)$ war also richtig.

□

Vergleichen wir dieses fundamentale Resultat mit den Sätzen der L^1-Theorie, so fällt sofort die Einfachheit auf, wie das Problem der Fourier-Inversion auf L^2 gelöst wird. In der Tat kann man gar nicht von einem Problem sprechen. Die L^1- und L^2-

Theorie bilden das Fundament, auf dem weitere Fourier-Analysis aufbaut. Die hier angeführten Ergebnisse sind u.a. von grosser Bedeutung in den Sätzen der Theorie der Distributionen, wo man eine viel reichhaltigere Fourier Transformation definiert. Auf diese oder andere Theorien wird jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Als Abschluss möchten wir ein klassisches Anwendungsbeispiel skizzieren, und motivieren, dass die L^1-Theorie, vorallem aber die L^2-Theorie auch an sich viele interessante Resultate hervorbringen kann.

4 Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \Delta u(x,t) \qquad (\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}) \\
u(x,0) &= f(x) \in \mathbb{C}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

wobei wir an Lösungen $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\to \mathbb{C}$ interessiert sind, die wir bedenkenlos Fourier-transformieren können (beispielsweise für $u(\cdot,t)$ aus $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ oder dem *Schwartz-Raum*, $\forall t \geq 0$). Man beachte, dass $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\mathcal{F}$ in diesem Beispiel kommutieren. Wie üblich schreiben wir nun $\hat{u}$ statt $\mathcal{F}u$, und unterlassen es ggf. notwendige Grenzwertprozesse mitzuführen.

Nach Anwendung der Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Differentialgleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,t) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x,t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -4\pi^2 x_i^2 \hat{u}(k,t) \\ &= -4\pi^2 k^2 \hat{u}(k,t), \\ \text{und} \quad \hat{u}(k,0) &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung. Ihre Lösung lässt sich sofort ablesen zu

$$\hat{u}(k,t) = e^{-4\pi^2 k^2 t}\hat{f}(k).$$

Diese Funktion lässt sich unter den getroffenen Annahmen problemlos Fourier-invertieren. Somit kann die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung explizit angegeben werden.
In Bezug auf die L^2-Theorie ist es erwähnenswert, dass die Wärmeleitungsgleichung grosse Ähnlichkeit hat zur *Schrödinger-Gleichung* (eines freien Teilchens):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t),$$

wobei in der Quantenmechanik Lösungen $\psi \in L^2$ betrachtet werden. Wie bereits veranschaulicht wurde, ist die Fourier-Transformation und Inversion auf L^2 besonders einfach handzuhaben, sodass sich in diesem Zusammenhang sehr viele Anwendungen in der Quantenmechanik ergeben.

Literatur

[1] Prof. Struwe: Funktionalanalysis I, 2002