

# 1 Calderón-Zygmund-Ungleichung

In unserem letzten Kapitel wollen wir die Calderón-Zygmund-Ungleichung beweisen. Sie besagt folgendes.

## THEOREM: (Calderón-Zygmund)

Sei  $f$  eine  $C^2$ -Funktion mit kompakten Träger. Sei  $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ . Dann haben wir a priori die Schranke

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leq A_p \|\Delta f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

Um diese Aussage auf schönem Wege beweisen zu können, benutzen wir die sogenannte Riesz-Transformation. Zuerst werden wir aber den eindimensionalen Fall der Riesz-Transformation betrachten: die Hilbert-Transformation. Wichtige Eigenschaften, welche wir für den Beweis verwenden werden, beweisen wir zuerst für die Hilbert-Transformation. Anschliessend werden wir diese Behauptungen auf den  $n$ -dimensionalen Fall ausweiten.

## 1.1 Die Hilbert-Transformation

**Definition:** Der Operator  $H : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  mit

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy \quad (1)$$

heisst *Hilbert-Transformation*.

Der Kern dieser Transformation ist somit gegeben durch

$$K(x) = \frac{1}{\pi x}$$

und mit  $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|}$  erhalten wir

$$\Omega(x) = |x| K(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{x} = \frac{1}{\pi} \text{sign}(x).$$

Gemäss Theorem 1 aus dem 3. Teil über singuläre Integrale wissen wir, dass es einen Multiplikator  $m(x)$  gibt, sodass

$$\widehat{(Hf)}(x) = m(x) \hat{f}(x)$$

gilt. Hier zur Erinnerung nochmals die Aussage des Satzes.

**Satz 1** Sei  $\Omega$  homogen vom Grad 0 und erfülle  $\Omega$ :

$$(a) \quad \int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0 \quad (\text{Auslöschung}) \quad (2)$$

$$(b) \quad \sup_{\substack{|x-x'|\leq\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \quad (\text{Glattheit}) \quad (3)$$

Sei weiters  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $T(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy$ . Dann:

- $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$ , wobei
- $m(x) = \int_{S^{n-1}} \left[ \log\left(\frac{1}{|xy|}\right) + i\frac{\pi}{2}\text{sign}(xy) \right] \Omega(y) d\sigma(y), \quad |x|=1$
- und  $m(x)$  ist homogen vom Grad 0.

Diesen Satz dürfen wir anwenden, da das  $\Omega(x)$  der Hilbert-Transformation die Voraussetzungen erfüllt.

$$\begin{aligned} \text{Auslöschungsbedingung: } \int_{S^0} \Omega(x) dx &= \Omega(-1) + \Omega(1) \\ &= \frac{1}{\pi} [\text{sign}(-1) + \text{sign}(1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Glattheitsbedingung: Da für  $x, x' \in \mathbb{R}$  mit  $\|x\| = \|x'\| = 1$  gelten muss

$$|x - x'| = \begin{cases} 0 & x = x' \\ 2 & x = -x' \end{cases},$$

folgt daraus direkt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta &= \int_0^1 \frac{1}{\pi\delta} |\text{sign}(x) - \text{sign}(x')| d\delta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\pi\delta} \cdot 0 d\delta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit können wir mit der im Satz angegebenen Formel unseren Multiplikator  $m$  berechnen.

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_{S^{n-1}} \left[ \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot y) + \log\left(\frac{1}{|x \cdot y|}\right) \right] \Omega(y) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^0} \left[ \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot y) + \log\left(\frac{1}{|x \cdot y|}\right) \right] \frac{1}{\pi} \text{sign}(y) d\sigma(y) \\ &\stackrel{S^0=\{\pm 1\}}{=} \left[ \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x) + \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \Omega(1) + \left[ \frac{\pi i}{2} \text{sign}(-x) + \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \Omega(-1) \\ &= \frac{i}{2} \text{sign}(x) + \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1}{|x|}\right) + \frac{i}{2} \text{sign}(x) - \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ &= i \text{sign}(x) \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\widehat{(Hf)}(x) = i \operatorname{sign}(x) \hat{f}(x). \quad (4)$$

Da der Kern von  $H$  die Form  $\frac{\Omega(x)}{|x|}$  hat, kommutiert gemäss dem 2. Teil über singuläre Integrale  $H$  mit positiven Dilatationen. Durch Nachrechnen sieht man, dass  $H$  mit negativen Dilatationen antikommutiert, d.h.

$$H\tau_\delta = -\tau_\delta H.$$

Zudem ist offensichtlich, dass  $H$  ebenfalls mit Translationen kommutiert. Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Hilbert-Transformation, was wir in dem folgenden Satz festhalten möchten.

**PROPOSITION 1** Sei  $T$  ein beschränkter Operator von  $L^2(\mathbb{R})$  nach  $L^2(\mathbb{R})$ , der folgende Bedingungen erfüllt:

- $T$  kommutiert mit Translationen
- $T$  kommutiert mit positiven Dilatationen
- $T$  antikommutiert mit der Reflexion  $f(x) \longrightarrow f(-x)$

Dann ist  $T$  ein konstantes Vielfaches der Hilbert-Transformation.

*Beweis:* Für den Beweis nehmen wir die Fouriertransformation zu Hilfe. Gemäss einem Satz aus dem Kapitel der singulären Integrale wissen wir, dass für einen beschränkten Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$  eine beschränkte Funktion  $m(x)$  existiert, sodass  $\widehat{(Tf)}(x) = m(x) \hat{f}(x)$  gilt. Um eine angenehmer Notation zu haben, setzen wir  $\mathcal{F}f = \hat{f}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\tau_\delta f)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} (\tau_\delta f)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} f(\delta x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \frac{x'}{\delta} y} f(x') |\delta^{-1}| dx' \\ &= |\delta|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ix'(\delta^{-1}y)} f(x') dx' \\ &= |\delta|^{-1} (\mathcal{F}f)(\delta^{-1}y) \\ &= |\delta|^{-1} (\tau_{\delta^{-1}} \mathcal{F}f)(y) \end{aligned}$$

Weil dies für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt, folgt daher

$$\mathcal{F}\tau_\delta = |\delta|^{-1} \tau_{\delta^{-1}} \mathcal{F}. \quad (5)$$

Die zweite und dritte Voraussetzung der Proposition an den Operator  $T$  ist äquivalent zu

$$T\tau_\delta = \text{sign}(\delta)\tau_\delta T. \quad (6)$$

Wir definieren den Operator  $M : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  durch  $Mf = m \cdot f$ . Dann kann man die Relation des Multiplikators schreiben als

$$\mathcal{F}T = M\mathcal{F} \quad (7)$$

Mit diesen drei Formeln können wir nun schliessen:

$$\begin{aligned} \tau_\delta M &\stackrel{(7)}{=} \underbrace{\tau_\delta \mathcal{F}} T \mathcal{F}^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} |\delta|^{-1} \mathcal{F} \underbrace{\tau_{\delta^{-1}} T} \mathcal{F}^{-1} \\ &\stackrel{(6)}{=} |\delta|^{-1} \text{sign}(\delta^{-1}) \mathcal{F} T \underbrace{\tau_\delta \mathcal{F}^{-1}} \\ &\stackrel{(5)}{=} \underbrace{|\delta|^{-1} \text{sign}(\delta^{-1}) |\delta|}_{\text{sign}(\delta)} \mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1} \tau_\delta \\ &= \text{sign}(\delta) \underbrace{\mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1}} M \tau_\delta \\ &\stackrel{(7)}{=} \text{sign}(\delta) M \tau_\delta \end{aligned}$$

Wir finden also, dass

$$\tau_\delta M = \text{sign}(\delta) M \tau_\delta$$

gilt. Wenden wir nun den Operator auf der linken Seite auf eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  an, folgt

$$((\tau_\delta M)f)(x) = (\tau_\delta(Mf))(x) = (Mf)(\delta x) = m(\delta x) \cdot f(\delta x).$$

Dasselbe Vorgehen auf der rechten Seite liefert

$$\text{sign}(\delta) ((M\tau_\delta)f)(x) = \text{sign}(\delta) M(\tau_\delta f)(x) = m(x) \cdot (\tau_\delta f)(x) = \text{sign}(\delta) m(x) \cdot f(\delta x).$$

Da dies für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt, folgt

$$m(\delta x) = \text{sign}(\delta) m(x), \quad \delta \neq 0.$$

Somit ist der Multiplikator von der Form

$$m(x) = c \cdot \text{sign}(x), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Es gilt also

$$\mathcal{F}T = m\mathcal{F} = c \cdot \text{sign}(x)\mathcal{F} = (-ic) \cdot i \cdot \text{sign}(x)\mathcal{F} \stackrel{(4)}{=} (-ic) \cdot \mathcal{F}H = \mathcal{F}(-ic \cdot H),$$

womit der Satz bewiesen ist.

q.e.d.

Als nächstes machen wir nun den Sprung von einer zu  $n$  Dimensionen. Wir werden die Hilbert-Transformation für den mehrdimensionalen Fall „umschreiben“, woraus die Riesz-Transformation entsteht. Zudem gelten die analogen Aussagen, welche wir gerade bewiesen haben, auch im allgemeinen Fall. Das heisst, es gibt eine analoge Aussage von Proposition 1 für die Riesz-Transformation.

## 1.2 Riesz-Transformation

Beginnen wir vorerst mit einigen elementaren Beobachtungen. Sei  $m(x) = (m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x))$  ein  $n$ -Tupel von Funktionen, welches auf  $\mathbb{R}^n$  definiert ist. Für eine beliebige Rotation  $\rho \in SO(n)$  schreiben wir  $\rho = (\rho_{jk})$  für die dazugehörige Matrixschreibweise. Falls die Funktion  $m(x)$  als ein Vektor transformiert, kommutiert sie mit beliebigen Rotationen  $\rho$ :

$$m(\rho(x)) = \rho(m)(x),$$

oder expliziter formuliert

$$m_j(\rho(x)) = \sum_k \rho_{jk} m_k(x), \quad \text{für jede Rotation } \rho. \quad (8)$$

LEMMA Sei  $m$  homogen mit Grad 0, d.h.  $m(\delta x) = m(x)$  für  $\delta > 0$ . Falls sich  $m$  gemäss (8) verhält, dann gilt  $m(x) = c \frac{x}{|x|}$  für eine Konstante  $c$ , d.h.

$$m_j(x) = c \frac{x_j}{|x|}$$

*Beweis:* Dank der Homogenität von  $m$  genügt es,  $x$  auf der Einheitssphäre zu betrachten. Seien  $e_1, e_2, \dots, e_n$  die übliche Einheitsvektoren. Für jede Rotation  $\rho \in SO(n)$ , die  $e_1$  festhält, ergibt (8):

$$\rho(m(e_1)) = m(\rho(e_1)) = m(e_1) = (m_1(e_1), m_2(e_1), \dots, m_n(e_1)). \quad (9)$$

Das bedeutet, dass der  $(n-1)$ -dimensionale Vektor  $(m_2(e_1), m_3(e_1), \dots, m_n(e_1))$  für jede Rotation, die  $e_1$  festhält, unverändert bleibt. Daraus folgt offenbar

$$m_2(e_1) = m_3(e_1) = \dots = m_n(e_1) = 0. \quad (10)$$

Für ein beliebiges  $\rho \in SO(n)$  gilt daher gemäss (8)

$$m_j(\rho(e_1)) = \rho_{j1}m_1(e_1) + \underbrace{\sum_{k=2}^n \rho_{jk}m_k(e_1)}_{=0} = \rho_{j1} \underbrace{m_1(e_1)}_{=:c} = c\rho_{j1}.$$

Sei nun  $x \in S^{n-1}$  fest. Dann finden wir ein  $\rho \in SO(n)$ , sodass  $x = \rho(e_1)$  gilt. Dadurch erhält man  $x_j = \rho_{j1}$ . Es gilt also

$$m_j(x) = c \cdot x_j,$$

was genau der Behauptung des Lemmas entspricht.

q.e.d.

Nun sind wir in der Lage die Riesz-Transformation zu definieren.

**Definition:** Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  mit  $1 \leq p < \infty$ . Dann nennen wir

$$R_j(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_n \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy, \quad j = 1, \dots, n \quad (11)$$

die *Riesz-Transformation*, wobei  $c_n$  eine Konstante ist, die wir später noch genauer charakterisieren werden.

Gemäss der Definition (11) finden wir als Kern  $K_j(x) = \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$  für  $\Omega_j(x) = c_n \frac{x_j}{|x|}$ . Wie bei der Hilbert-Transformation erfüllt auch dieses  $\Omega_j$  die Bedingungen (2) und (3) von Satz 1 vom 3. Teil über singuläre Integrale.

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \Omega_j(x) dx &= \int_{S^{n-1}} c_n \frac{x_j}{|x|} dx \\ &= c_n \int_{S^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\text{gerade}} \underbrace{x_j}_{\text{ungerade}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta &= \int_0^1 \frac{1}{\delta} \left( \sup_{\substack{|x-x'| < \delta \\ \|x\| = \|x'\| = 1}} |\Omega_j(x) - \Omega_j(x')| \right) d\delta \\
&= \int_0^1 \frac{c_n}{\delta} \sup_{\substack{|x-x'| < \delta \\ \|x\| = \|x'\| = 1}} \left| \frac{x_j}{|x|} - \frac{x'_j}{|x'|} \right| d\delta \\
&= \int_0^1 \frac{c_n}{\delta} \sup_{\substack{|x-x'| < \delta \\ \|x\| = \|x'\| = 1}} |x - x'| d\delta \\
&\leq \int_0^1 c_n d\delta \\
&= c_n < \infty
\end{aligned}$$

Für die Riesz-Transformation  $R_j : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  existiert also ein Multiplikator  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , sodass

$$(\widehat{R_j(f)})(x) = m_j(x) \hat{f}(x)$$

gilt. Jetzt wollen wir das Lemma auf den Multiplikator anwenden: wir wissen dafür bereits, dass er homogen vom Grad 0 ist und es bleibt nur noch die Kommutativität mit Rotationen zu zeigen:

$$\begin{aligned}
m(\rho(x)) &= c_n \int_{S^{n-1}} \left( \frac{\pi i}{2} \text{sign}(\rho(x) \cdot y) + \log \left| \frac{1}{\rho(x) \cdot y} \right| \right) \Omega(y) d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left( \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot \rho^{-1}(y)) + \log \left| \frac{1}{x \cdot \rho^{-1}(y)} \right| \right) \frac{y}{|y|} d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left( \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot y) + \log \left| \frac{1}{x \cdot y} \right| \right) \frac{\rho(y)}{|y|} \underbrace{d\sigma(y)}_{=1} \\
&= \rho(m(x))
\end{aligned}$$

Dank der Formel des oben erwähnten Satzes bekommen wir für unseren Multiplikator

$$\begin{aligned}
m_j(x) &= c_n \int_{S^{n-1}} \left( \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot y) + \log \left| \frac{1}{x \cdot y} \right| \right) \Omega_j(y) d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left( \frac{\pi i}{2} \text{sign}(x \cdot y) + \log \left| \frac{1}{x \cdot y} \right| \right) \frac{y_j}{|y|} d\sigma(y) \\
&\stackrel{\text{gemäss Lemma}}{=} c \frac{x_j}{|x|}.
\end{aligned}$$

Da  $c$  eine Konstante ist, genügt es  $c$  für ein bestimmtes  $x$  zu berechnen. Wir wählen  $x = e_j$ . Dadurch folgt

$$c_n \left[ \int_{S^{n-1}} \frac{\pi i}{2} \text{sign}(y_j) y_j d\sigma(y) + \underbrace{\int_{S^{n-1}} \log \left| \frac{1}{y_j} \right| y_j d\sigma(y)}_{=0} \right] = c.$$

Wir wählen die Konstante  $c_n$  in der Definition (11) nun so, dass  $c = i$  gilt. Dies ist dann äquivalent zur Gleichung

$$c_n = \frac{2}{\pi} \left( \int_{S^{n-1}} |y_j| d\sigma(y) \right)^{-1}.$$

Berechnet man dieses Integral, erhält man

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Zusammengefasst heisst dies nun, dass wir für  $c_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$  die Konstante  $c = i$  bekommen und der Multiplikator daher die Gestalt

$$m_j(x) = i \frac{x_j}{|x|}$$

hat, d.h.

$$\widehat{(R_j f)}(x) = i \frac{x_j}{|x|} \hat{f}(x) \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Wie im vorherigen Kapitel angekündigt, gibt es auch für die Riesz-Transformation eine analoge Aussage zu Proposition 1. Dazu übertragen wir lediglich noch die Eigenschaft (8) des Multiplikators  $m$  auf  $R_j$ . Es gilt

$$\rho R_j \rho^{-1} f = \sum_k \rho_{jk} R_k f.$$

**PROPOSITION 2** Sei  $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$  ein  $n$ -Tupel von beschränkten Transformationen von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Es gelte

1. Jedes  $T_j$  kommutiert mit Translationen in  $\mathbb{R}^n$ .
2. Jedes  $T_j$  kommutiert mit Dilatation in  $\mathbb{R}^n$ .
3. Für jede Rotation  $\rho = (\rho_{jk})$  in  $\mathbb{R}^n$  gilt  $\rho T_j \rho^{-1} f = \sum_k \rho_{jk} T_k f$ .

Dann sind die  $T_j$  konstante Vielfache der Riesz-Transformation  $R_j$ , d.h. es existiert eine Konstante  $c$ , sodass  $T_j = c R_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

Den Beweis dieser Proposition überlassen wir dem Leser. Es ist eigentlich nur ein Zusammentragen der bisherigen Erkenntnisse und ist ausserdem vergleichbar mit dem analogen Satz für die Hilbert-Transformation.

### 1.3 Beweis der Calderón-Zygmund-Ungleichung

Wir wissen aus dem 3. Teil über singuläre Integrale (Theorem 1), dass die Riesz-Transformation in der  $L^p$ -Norm beschränkt ist. Wir können also schreiben

$$\|R_j\|_p \leq A_{j,p} \quad (13)$$

Wir zeigen nun folgende Identität für eine Funktion  $f \in C^2$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta f \quad (14)$$

Es gilt  $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} f(y) dy$ . Wir bekommen also für die Fouriertransformation von  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  den Ausdruck  $2\pi i x_j \hat{f}(x)$ . Daher folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)}(x) &= -2\pi i x_j \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)}(x) \\ &= -4\pi^2 x_j x_k \hat{f}(x) \\ &= -\left(\frac{i x_j}{|x|}\right) \left(\frac{i x_k}{|x|}\right) (-4\pi^2 |x|^2) \hat{f}(x) \\ &= -\underbrace{\left(\frac{i x_j}{|x|}\right)}_{m_j(x)} \underbrace{\left(\frac{i x_k}{|x|}\right)}_{m_k(x)} \widehat{(\Delta f)}(x) \\ &\stackrel{(12)}{=} -\left(\frac{i x_j}{|x|}\right) \widehat{(R_k \Delta f)}(x) \\ &\stackrel{(12)}{=} -\widehat{(R_j R_k \Delta f)}(x) \end{aligned}$$

Damit folgt (14) mit der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation. Dank dieser Formel und der Beschränktheit der Riesz-Transformation in der  $L^p$ -Norm lässt sich die Calderón-Zygmund-Ungleichung nun direkt beweisen.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p &\stackrel{(14)}{=} \| -R_j R_k \Delta f \|_p \\ &\leq \| R_j \|_p \| R_k \|_p \| \Delta f \|_p \\ &\stackrel{(13)}{\leq} \underbrace{A_{j,p} \cdot A_{k,p}}_{=: A_p} \| \Delta f \|_p \\ &= A_p \| \Delta f \|_p \end{aligned}$$

q.e.d.

## 1.4 Weitere Anwendung

Eine weitere nützliche Anwendung der Riesz-Transformation ist der Beweis der Ungleichung

**THEOREM:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann gilt

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_p + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \leq A_p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p, \quad 1 < p < \infty. \quad (15)$$

Den Beweis hierzu führen wir ähnlich wie denjenigen der Calderón-Zygmund-Ungleichung. Nur mit dem Unterschied, dass wir eine andere Identität verwenden. Die hier verwendete Gleichung lautet

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -R_j(R_1 - iR_2) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Beginnen wir einmal rechts und benutzen die Fouriertransformation.

$$\begin{aligned} & \left( -R_j(R_1 - iR_2) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \right)^\wedge(x) \\ &= -\frac{ix_j}{|x|} \left( R_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + iR_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - iR_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^\wedge(x) \\ &= -\frac{ix_j}{|x|} \left[ \frac{ix_1}{|x|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^\wedge(x) + \frac{ix_2}{|x|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^\wedge(x) - \frac{x_1}{|x|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^\wedge(x) + \frac{x_2}{|x|} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^\wedge(x) \right] \\ &= -\frac{ix_j}{|x|^2} \left[ ix_1 \left( -2\pi ix_1 \hat{f}(x) \right) + ix_2 \left( -2\pi ix_2 \hat{f}(x) \right) + \underbrace{2\pi ix_1 x_2 \hat{f}(x) - 2\pi ix_1 x_2 \hat{f}(x)}_{=0} \right] \\ &= -\frac{2\pi ix_j}{|x|^2} \underbrace{[x_1^2 + x_2^2]}_{=|x|^2} \hat{f}(x) \\ &= -2\pi ix_j \hat{f}(x) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^\wedge(x). \end{aligned}$$

Wir hätten die Gleichung (16) hiermit gezeigt. Nun verwenden wir diese Identität und die  $L^p$ -Beschränktheit der Riesz-Transformation, um die Behauptung (15) zu zeigen.

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_p + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \\ &= \left\| -R_1(R_1 - iR_2) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \right\| + \left\| -R_2(R_1 - iR_2) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \right\| \\ &\leq \|R_1\|_p \|R_1 - iR_2\|_p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p + \|R_2\|_p \|R_1 - iR_2\|_p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \\ &\leq \|R_1\|_p \left( \|R_1\|_p + \|R_2\|_p \right) \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p + \|R_2\|_p \left( \|R_1\|_p + \|R_2\|_p \right) \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \\ &= \underbrace{\left( \|R_1\|_p + \|R_2\|_p \right)^2}_{=: A_p} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \\ &= A_p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p \end{aligned}$$

q.e.d.